

NIL-PRIME IDEALS OF A QUOTIENT RING $\mathbb{Z}_n[X] / \langle X^2 \rangle$ AND THEIR CHARACTERIZATIONS

IDEAL NIL-PRIMA PADA RING FAKTOR $\mathbb{Z}_n[X] / \langle X^2 \rangle$ DAN KARAKTERISASINYA

Bramantyo Adi Kuncoro¹, Teduh Wulandari Mas'ood^{2‡},
and Fendy Sptyanto^{3‡}

^{1,2,3}Computer Science Study Program, IPB University, Indonesia
[‡]corresponding author: adityo170404kuncoro@apps.ipb.ac.id

Copyright © 2026 Bramantyo Adi Kuncoro. This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

The development of ideal theory in abstract algebra has given rise to various generalizations of the concept of prime ideals in commutative rings, one of which is the nil-prime ideal. A proper ideal P of a commutative ring R is called a nil-prime ideal with respect to $X \in Nil(R)$ if for every $a, b \in R$ with $ab \in P$, it holds that $a \in P$ or $b \in P$ or $a + X \in P$ or $b + X \in P$. The class of nil-prime ideals lies strictly between the class of prime ideals and $\mathfrak{R}$ -prime ideals, but the converse does not always hold. This study aims to reconstruct the structure of the quotient ring $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, to show that the set $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ constitutes a nil-prime ideal, and to characterize its properties. The results show that the quotient ring $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ consists of polynomial classes of the form $a + bX$ with $a, b \in \mathbb{Z}_n$, which X is nilpotent element. For I a prime ideal in $\mathbb{Z}_n$ and $J = \mathbb{Z}_n$, it is proven that $K_{(I,J)}$ is both prime ideal and nil-prime ideal in $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. The characterization shows that for every $Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$, it holds that $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = K_{(I,J)}$ if n is odd, and $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \subseteq K_{(I,J)}$ if n is even.

Keywords: Nilpotent Element, Nil-Prime Ideal, Polynomial Ring, Quotient Ring

Abstrak

Perkembangan kajian ideal dalam aljabar abstrak telah melahirkan berbagai generalisasi konsep ideal prima pada ring komutatif, salah satunya adalah ideal nil-prima. suatu ideal sejati P dari ring komutatif R disebut ideal nil-prima terhadap $X \in Nil(R)$ jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P$, berlaku $a \in P$ atau $b \in P$ atau $a + X \in P$ atau $b + X \in P$.

Kelas ideal nil-prima berada secara tepat di antara kelas ideal prima dan $\mathfrak{R}$ -prima, namun kebalikannya tidak selalu berlaku. Penelitian ini bertujuan untuk merekonstruksi struktur ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, dan memperlihatkan suatu himpunan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ merupakan ideal nil-prima, serta mengkarakterisasi sifat-sifatnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ tersusun atas kelas-kelas polinomial berbentuk $a + bX$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}_n$, dengan X bersifat nilpoten. Untuk I ideal prima di $\mathbb{Z}_n$ dan $J = \mathbb{Z}_n$, terbukti bahwa $K_{(I,J)}$ merupakan ideal prima sekaligus ideal nil-prima pada $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. Karakterisasi menunjukkan bahwa untuk setiap $\text{Nil}(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$, berlaku $2 \cdot \text{Nil}(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = K_{(I,J)}$ jika n ganjil dan $2 \cdot \text{Nil}(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \subseteq K_{(I,J)}$ jika n genap.

Kata Kunci: *Elemen Nilpoten, Ideal Nil-Prima, Ring Faktor, Ring Polinomial.*

1. Pendahuluan

Teori ring sebagai salah satu cabang utama dalam ilmu aljabar abstrak telah menjadi fokus kajian yang sering diteliti bagi para matematikawan (Razaq & Alhamzi, 2023). Kemampuannya dalam memodelkan struktur matematika yang kompleks membuat teori ini semakin berkembang dan memberikan kontribusi signifikan terhadap kemajuan matematika modern. Secara umum, ring didefinisikan sebagai suatu himpunan R yang dilengkapi dua operasi biner, yakni penjumlahan dan perkalian, sedemikian sehingga $(R, +)$ membentuk grup abelian, $(R, \times)$ bersifat asosiatif, dan operasi perkalian bersifat distributif terhadap penjumlahan (Arifin & Ernanto, 2023). Salah satu konstruksi penting dalam teori ring adalah ring polinomial. Diberikan suatu ring komutatif R , ring polinomial yang dinotasikan dengan $R[X]$ didefinisikan sebagai himpunan semua polinomial dengan koefisien dari setiap polinomialnya merupakan anggota dari ring R (Abuosba & Alazaizeh, 2025).

Artikel pada jurnal "Indonesian Journal of Statistics and Its Applications" terdiri dari beberapa bagian, yaitu bagian Judul, Pengarang, Afiliasi, Abstract, Pendahuluan, Metodologi, Hasil dan Pembahasan, Simpulan dan saran, dan diakhiri dengan Daftar Pustaka. Bab Pendahuluan memuat latar belakang atau alasan kuat dilakukannya penelitian, tujuan, dan hipotesis jika ada. Di dalam pendahuluan mungkin dijelaskan pula perumusan atau pendekatan penyelesaian masalah dan alasan pemilihan metode yang digunakan.

Dalam struktur ring, terdapat beberapa elemen khusus ring, salah satunya adalah ideal. Secara definisi, suatu himpunan bagian I dari ring R disebut ideal apabila, $(I, +)$ merupakan subgrup dari $(R, +)$ dan untuk setiap $r \in R$ dan $n \in I$ berlaku $rn \in I$ dan $nr \in I$ (Atiyah, 2018). Kajian mengenai

ideal pada suatu ring juga menghasilkan beberapa macam jenis ideal pada suatu ring, antara lain ideal prima dan ideal maksimal. Suatu ideal sejati P dari ring komutatif R disebut ideal prima, jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P$, maka $a \in P$ atau $b \in P$ (Anderson & Kintzinger, 2008).

Kajian mengenai generalisasi ideal prima salah satunya dikembangkan melalui konsep ideal S -prima dalam penelitian berjudul "*S-prime ideal of a commutative ring*" (Hamed & Malek, 2020), pengembangan konsep ideal prima lainnya juga dilakukan dengan melibatkan unsur nilpoten secara eksplisit melalui konsep ideal $\mathfrak{R}$ -prima dalam penelitian "*On N -Prime Ideals*" (Sevim & Koç, 2018). Elemen nilpoten dikarakterisasikan sebagai sebuah elemen yang, jika dipangkatkan oleh suatu bilangan bulat positif, menghasilkan nol. Dengan kata lain, sebuah elemen e disebut sebagai elemen nilpoten jika $e^k = 0$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$ (Phan Hong, 2025). Konsep ideal $\mathfrak{R}$ -prima ini secara eksplisit telah melibatkan elemen nilpoten ring dalam pendefinisian sifat primanya, sehingga membuka ruang eksplorasi yang lebih luas tentang bagaimana elemen nilpoten berinteraksi dengan struktur ideal suatu ring.

Farshadifar (2025) memperkenalkan konsep baru yang disebut ideal nil-prima pada penelitian berjudul "*Nil-Prime ideals of a Commutative Ring*" (Farshadifar, 2025). Secara definisi, suatu ideal sejati S dari ring komutatif R disebut ideal nil-prima terhadap $X \in \text{Nil}(R)$ jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in S$, maka $a \in S$ atau $b \in S$ atau $a + X \in S$ atau $b + X \in S$. Farshadifar juga membuktikan bahwa kelas ideal nil-prima berada secara tepat diantara kelas ideal prima dan kelas ideal $\mathfrak{R}$ -prima, dalam arti setiap ideal prima adalah ideal nil-prima dan setiap ideal nil-prima adalah ideal $\mathfrak{R}$ -prima, tetapi kebalikannya tidak selalu berlaku.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji secara teoretis bagaimana konstruksi atau pembentukan dari sebuah ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ yang tersusun atas himpunan polinomial atas ring bilangan bulat modulo n ($\mathbb{Z}_n[X]$) dan ideal pembangunnya ($\langle X^2 \rangle$). Penelitian ini juga bertujuan untuk memperlihatkan untuk suatu himpunan bagian dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ yakni himpunan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ merupakan ideal sekaligus ideal prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, kemudian berdasarkan contoh numerik untuk suatu ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ akan diperlihatkan juga bahwa himpunan $K_{(I,J)}$ adalah ideal nil-prima beserta karakterisasi atau sifat-sifat pada setiap anggota dari himpunan $K_{(I,J)}$ sebagai ideal nil-prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$.

2. Metodologi

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis yang berbasis pada studi literatur dengan merujuk pada berbagai buku teks dan jurnal penelitian. Adapun pendekatan yang diterapkan meliputi pendekatan deduktif dan aksiomatik, yakni proses penarikan kesimpulan atas kebenaran suatu pernyataan matematis dengan berlandaskan pada aksioma, definisi, lema, dan teorema yang telah diuji kebenarannya.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Preliminary Notes

Teorema 3.4.1 (Adkins & Weintraub, 1992) Jika R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan, maka $R[X]$ ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Teorema 3.4.2 (Adkins & Weintraub, 1992) $\langle R/I, +, \cdot \rangle$ merupakan ring dan disebut sebagai ring faktor dari R oleh I .

Teorema 3.4.3 (Adkins & Weintraub, 1992) Misalkan R ring komutatif dengan unsur kesatuan. Jika $f(X) \in R[X]$ dan $g(X)$ suatu polinomial di $R[X]$ dengan koefisien pangkat tertinggi dari $g(X)$ adalah unit di R , maka terdapat dengan tunggal polinomial $q(X)$ dan $r(X)$ di $R[X]$ dengan $r(X) = 0$ atau $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ sedemikian sehingga $f(X) = g(X)q(X) + r(X)$.

Teorema 3.4.4 (Farshadifar, 2025) Misalkan R ring komutatif, P adalah ideal nil-prima dari R , dengan $p(X) \in Nil(R)$ maka berlaku $2 \cdot p(X) \in P$.

Teorema 3.4.5 (Farshadifar, 2025) Setiap ideal prima pada ring R adalah ideal nil-prima di R .

Teorema 3.4.6 (Adkins & Weintraub, 1992) Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ dengan p_i merupakan bilangan prima berbeda di $\mathbb{Z}_n$ dan a_i bilangan bulat positif, maka himpunan anggota dari unsur nilpoten di $\mathbb{Z}_n$ yang dinotasikan dengan $Nil(\mathbb{Z}_n) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$.

3.2 Konstruksi dan Strukur Aljabar Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

3.2.1 Perencanaan Cepat

Didefinisikan sebuah himpunan elemen-elemen dari ring bilangan bulat modulo n sebagai himpunan bilangan bulat modulo n sebagai berikut:

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{n-1}\}.$$

Menggunakan sifat himpunan di $\mathbb{Z}_n$, maka bersama dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo n membentuk struktur ring $\mathbb{Z}_n$ yang komutatif dengan unsur kesatuan 1 (Rather et al., 2021). Selanjutnya didefinisikan sebuah himpunan polinomial di $\mathbb{Z}_n$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n[X]$. Polinomial pada $\mathbb{Z}_n[X]$ dinotasikan sebagai $f(X)$ yang merupakan sebarang polinomial berderajat bebas dengan koefisien tiap polinomialnya di $\mathbb{Z}_n$. Polinomial $f(X)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(X) = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i X^i \right\} = \{a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots + a_k X^k\}.$$

Dengan $a_i \neq 0, a_i \in \mathbb{Z}_n$ untuk $i = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1, k$. Sehingga semua himpunan polinomial di $\mathbb{Z}_n$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n[X]$ dapat dituliskan secara matematis sebagai berikut:

$$\mathbb{Z}_n[X] = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i X^i, a_i \in \mathbb{Z}_n \right\} = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k\}.$$

Perhatikan bahwa, karena $\mathbb{Z}_n$ merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan, maka berdasarkan Teorema 3.4.1, himpunan polinomial di $\mathbb{Z}_n$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n[X]$ juga merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan.

3.2.2 Konstruksi Ideal Pembangun $\langle X^2 \rangle$

Ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dibangun oleh sebuah ideal, pada ring faktor tersebut, syarat $\langle X^2 \rangle$ haruslah merupakan elemen ideal dari ring $\mathbb{Z}_n[X]$. Didefinisikan sebuah himpunan bagian yang dibangun oleh elemen X^2 yang dinotasikan dengan $\langle X^2 \rangle$ merupakan himpunan semua kelipatan dari X^2 oleh sebarang polinomial di $\mathbb{Z}_n[X]$. Didefinisikan sebagai berikut:

$$\langle X^2 \rangle = \{p(X) \cdot X^2 \mid p(X) \in \mathbb{Z}_n[X]\}.$$

Misalkan sebarang polinomial $p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k \in \mathbb{Z}_n[X]$,

$$\langle X^2 \rangle = \{a_0 X^2 + a_1 X^3 + a_2 X^4 + \cdots + a_k X^{k+2}\}.$$

Dengan $k \geq 0, a_i \in \mathbb{Z}_n$. Sehingga bentuk umum dari elemen $\langle X^2 \rangle$ dituliskan sebagai berikut:

$$\langle X^2 \rangle = \left\{ \sum_{i=2}^k c_i X^i \mid k \geq 2, c_i \in \mathbb{Z}_n \right\} = \{c_2 X^2 + c_3 X^3 + \cdots + c_k X^k \mid c_n \neq 0, i \geq 2\}.$$

Bukti $\langle X^2 \rangle$ Ideal

(Ketertutupan Operasi Penjumlahan) Ambil sebarang $a, b \in \langle X^2 \rangle$, misalkan $a = p(X) \cdot X^2$ dan $b = q(X) \cdot X^2$, sehingga $a - b = (p(X) \cdot X^2) - (q(X) \cdot X^2) = (p(X) - q(X)) \cdot X^2$. Perhatikan bahwa, karena $\mathbb{Z}_n[X]$ adalah ring, jelas $p(X) - q(X) \in \mathbb{Z}_n[X]$. Jadi, terbukti $a - b \in \mathbb{Z}_n[X]$.

(Ketertutupan Operasi Perkalian) Ambil sebarang $p \in \mathbb{Z}_n[X]$ dan $h(X) \in \langle X^2 \rangle$, misalkan $p = p(X) \in \mathbb{Z}_n[X]$ dan $h(X) = f(X) \cdot X^2$, sehingga $p(X) \cdot h(X) = p(X)(f(X) \cdot X^2) = (p(X)f(X)) \cdot X^2$. Perhatikan bahwa, menggunakan sifat ketertutupan pada ring $\mathbb{Z}_n[X]$, jelas $p(X)h(X) \in \mathbb{Z}_n[X]$ dan karena ring $\mathbb{Z}_n[X]$ komutatif, maka berlaku juga $h(X)p(X) \in \langle X^2 \rangle$. Jadi, terbukti $\langle X^2 \rangle$ adalah ideal pada ring polinomial $\mathbb{Z}_n[X]$.

3.2.3 Struktur Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

Misalkan ring polinomial $R = \mathbb{Z}_n[X]$ dan $I = \langle X^2 \rangle$ adalah ideal dari R , maka koset-koset aditif dari I adalah $a + I$ dengan $a \in \mathbb{Z}_n[X]$. Diberikan himpunan $R/I = \{a + I, a \in \mathbb{Z}_n[X]\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan sebagai berikut:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Berdasarkan Teorema 3.4.2, maka ring faktor R/I dapat direpresentasikan sebagai himpunan koset-koset aditif dari I , yang dituliskan secara matematis sebagai $R/I = \{a + I \mid a \in R\} = \{a(X) + \langle X^2 \rangle \mid a(X) \in \mathbb{Z}_n[X]\}$, sehingga elemen dari ring faktor R/I adalah koset-koset yang direpresentasikan oleh polinomial $a(X)$ di $\mathbb{Z}_n[X]$ dengan suatu polinomial $\langle X^2 \rangle$. Perhatikan bahwa, misalkan $a(X) \in \mathbb{Z}_n[X]$ dan misalkan suatu himpunan polinomial yang dibangun oleh X^2 , maka berdasarkan Teorema 3.4.3 dan Algoritma Pembagian Polinomial setiap polinomial $a(X) \in \mathbb{Z}_n[X]$ dapat dibagi oleh X^2 sehingga polinomial $a(X)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $a(X) = X^2 q(X) + r(X)$, sehingga karena $\deg(r(X)) < \deg(X^2)$, maka $\deg(r(X)) < 2$ yang dapat dituliskan anggota dari $r(X) = a + bX$. Akibatnya, dapat didefinisikan untuk anggota-anggota dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ adalah sebagai berikut:

$$\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle = \{a(X) + \langle X^2 \rangle\} = \{r(X) + \langle X^2 \rangle\} = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Struktur ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ berlaku sifat bahwa $X^2 = 0$. Sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada ring faktor tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$(a + bX) + (c + dX) = ((a + c) + (b + d))X$$

$$(a + bX)(c + dX) = ac + (ad + bc)X$$

dengan $(a + bX), (c + dX) \in \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$.

3.3 Ideal pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

3.3.1 Himpunan $K_{(I,J)}$

Misalkan I adalah ideal prima di $\mathbb{Z}_n$ dan ideal $J = \mathbb{Z}_n$. Didefinisikan sebuah himpunan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ yang dituliskan sebagai berikut:

$$K_{(I,J)} = \{a + bX \mid a \in I, b \in J\}.$$

Bukti $K_{(I,J)}$ Ideal

(Ketertutupan Operasi Penjumlahan) Ambil sebarang $y_1, y_2 \in K_{(I,J)}$. Misalkan $y_1 = a_1 + b_1X$ dan $y_2 = a_2 + b_2X$, dengan $a_1, a_2 \in I$ dan $b_1, b_2 \in J$, sedemikian sehingga $y_1 - y_2 = (a_1 + b_1X) - (a_2 + b_2X) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)X$. Perhatikan bahwa, karena I dan J adalah ideal, maka $(a_1 - a_2) \in I$ dan $(b_1 - b_2) \in J$. Jadi, $y_1 - y_2 \in K_{(I,J)}$.

(Ketertutupan Operasi Perkalian) Ambil sebarang $r \in \mathbb{Z}_n[X] / \langle X^2 \rangle$,

dengan $r = p + qX$ untuk $p, q \in \mathbb{Z}_n$ dan sebarang ideal $y = a + bX \in K_{(I,J)}$, untuk $a \in I$ dan $b \in J$, sedemikian sehingga $ry = (p + qX)(a + bX) = (pa) + (bp + aq)X + (bq)X^2 = (pa) + (bp + aq)X$. Perhatikan bahwa, karena $a \in I$ dengan I adalah ideal, maka jelas $ac \in I$. Untuk setiap $a, b, p, q \in \mathbb{Z}_n$, dan $J = \mathbb{Z}_n$ jelas bahwa $(bp + aq) \in J$. Akibatnya $ry \in K - ((I, J))$ dan komutatif dengan $yr \in K_{(I,J)}$. Jadi, terbukti himpunan $K_{(I,J)}$ ideal dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$.

3.3.2 Himpunan $K_{(I,J)}$ Sebagai Ideal Prima di $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

Diketahui himpunan $K_{(I,J)}$ merupakan ideal dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. Selanjutnya, pada bagian ini, akan diperlihatkan melalui contoh bahwa himpunan $K_{(I,J)}$ merupakan ideal prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$.

Contoh 1

Diberikan ring faktor $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$. Ideal-ideal pada $\mathbb{Z}_4 = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\}$, pilih $I = \langle 2 \rangle$ dan $J = \langle 1 \rangle$ sehingga dapat dibentuk himpunan $K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)} \subseteq \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ yang merupakan ideal di $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)} = \{a + bX \mid a \in I, b \in J\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{0}, \bar{2}, X, \bar{2}X, \bar{3}X, \\ \bar{2} + X, \bar{2} + \bar{2}X, \bar{2} + \bar{3}X \end{array} \right\}.$$

Berdasarkan definisi ideal prima, untuk setiap $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$. Ideal $K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ disebut sebagai ideal prima jika $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, maka $a(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ atau $b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$. Diketahui juga untuk setiap $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$, dengan anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Z}_4\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, X, \bar{2}X, \bar{3}X, \\ \bar{1} + X, \bar{1} + \bar{2}X, \bar{1} + \bar{3}X, \\ \bar{2} + X, \bar{2} + \bar{2}X, \bar{2} + \bar{3}X, \\ \bar{3} + X, \bar{3} + \bar{2}X, \bar{3} + \bar{3}X \end{array} \right\}.$$

Karena untuk setiap $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$, maka akan diperlihatkan untuk setiap anggota $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, maka $a(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ atau $b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$. Untuk kasus pertama $a(X) = \bar{0} \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)} \subseteq \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$. Perhatikan bahwa $(\bar{0})(\bar{1}) = \dots = (\bar{0})(X) = \dots = (\bar{0})(\bar{1} + X) = \dots = (\bar{0})(\bar{2} + X) = \dots = (\bar{0})(\bar{3} + X) = \dots = (\bar{0})(\bar{3} + \bar{3}X) = \bar{0} \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, dari hasil setiap perkalian didapatkan bahwa, jika $a(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ maka untuk sebarang $b(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ pastilah $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$. Untuk kasus kedua $a(X) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$. Perhatikan bahwa $(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1} \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, $(\bar{1})(\bar{2}) = \bar{2} \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, $(\bar{1})(\bar{3}) = \bar{3} \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, $(\bar{1})(X) = X \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, $(\bar{1})(\bar{2}X) = \bar{2}X \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, $(\bar{1})(\bar{3}X) = \bar{3}X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$,

$(\bar{1})(\bar{1} + X) = \bar{1} + X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}, \quad (\bar{1})(\bar{1} + \bar{2}X) = \bar{1} + \bar{2}X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)},$
 $(\bar{1})(\bar{1} + \bar{3}X) = \bar{1} + \bar{3}X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}, \quad (\bar{1})(\bar{2} + X) = \bar{2} + X \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)},$
 $(\bar{1})(\bar{2} + \bar{2}X) = \bar{2} + \bar{2}X \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}, \quad (\bar{1})(\bar{2} + \bar{3}X) = \bar{2} + \bar{3}X \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)},$
 $(\bar{1})(\bar{3} + X) = \bar{3} + X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}, \quad (\bar{1})(\bar{3} + \bar{2}X) = \bar{3} + \bar{2}X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)},$
 $(\bar{1})(\bar{3} + \bar{3}X) = \bar{3} + \bar{3}X \notin K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)},$ dari hasil setiap perkalian didapatkan bahwa, jika $a(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ agar hasil kali $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ maka haruslah $b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$.

Perhatikan bahwa, dari dua kasus terlihat sebuah pola yang dapat dilihat ketika $a(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)} \subseteq \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$, maka untuk $b(X)$ dapat berupa sebarang anggota di $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ agar hasil kali $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$. Sebaliknya, jika $a(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ agar $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, maka haruslah $b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ yang secara eksplisit membuktikan bahwa jika $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, maka $a(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ atau $b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$. Sehingga untuk kasus-kasus berikutnya pada setiap anggota dari $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ dapat diperlihatkan bahwa jika $a(X)b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, maka pastilah $a(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ atau $b(X) \in K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ atau dengan kata lain himpunan $K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$.

Selanjutnya, akan diperlihatkan unsur nilpoten dari $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$. Untuk suatu $f(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ terdapat $k = \mathbb{Z}^+$, sedemikian sehingga $(f(X))^k = 0$. Perhatikan bahwa, terdapat $k = 2$ sehingga $\bar{0}^2 = \bar{2}^2 = (\bar{2}X)^2 = (\bar{3}X)^2 = (\bar{2} + X)^2 = (\bar{2} + \bar{2}X)^2 = (\bar{2} + \bar{3}X)^2 = \bar{0}$. Jadi, $Nil(\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle) = \{\bar{0}, \bar{2}, X, \bar{2}X, \bar{3}X, \bar{2} + X, \bar{2} + \bar{2}X, \bar{2} + \bar{3}X\}$. Berdasarkan himpunan $K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ adalah ideal prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ dan terdapat $Nil(\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle)$, maka berdasarkan definisi, himpunan $K_{(\langle 2 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ merupakan ideal nil-prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 3.4.4 berlaku $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle)$ yakni, $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle) = \{\bar{0}, \bar{2}X\}$.

Contoh 2

Diberikan ring faktor $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$. Ideal-ideal pada $\mathbb{Z}_4 = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$, pilih $I = \langle 0 \rangle$ dan $J = \langle 1 \rangle$. Perhatikan bahwa, karena ideal $\langle 0 \rangle$ terletak pada ideal $\mathbb{Z}_5$ yang merupakan daerah integral hingga, maka $\langle 0 \rangle$ merupakan ideal prima (Prasetyo, 2019). Sehingga, dapat dibentuk sebuah himpunan $K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)} \subseteq \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ yang merupakan ideal pada ring faktor tersebut. Himpunan $K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ dituliskan secara matematis sebagai berikut:

$$K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)} = \{a + bX \mid a \in I, b \in J\} = \{\bar{0}, X, \bar{2}X, \bar{3}X, \bar{4}X\}.$$

Berdasarkan definisi ideal prima, $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$. Ideal $K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ disebut sebagai ideal prima jika $a(X)b(X) \in K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)}$, maka $a(X) \in K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)}$ atau $b(X) \in K_{(\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle)}$. Diketahui untuk setiap $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$, dengan anggota-anggota $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, X, \bar{2}X, \bar{3}X, \bar{4}X, \\ \bar{1} + X, \bar{1} + \bar{2}X, \bar{1} + \bar{3}X, \bar{1} + \bar{4}X, \\ \bar{2} + X, \bar{2} + \bar{2}X, \bar{2} + \bar{3}X, \bar{2} + \bar{4}X, \\ \bar{3} + X, \bar{3} + \bar{2}X, \bar{3} + \bar{3}X, \bar{3} + \bar{4}X, \\ \bar{4} + X, \bar{4} + \bar{2}X, \bar{4} + \bar{3}X, \bar{4} + \bar{4}X \end{array} \right\}.$$

Karena untuk setiap $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$, maka akan diperlihatkan untuk setiap anggota $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, maka $a(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ atau $b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$. Untuk kasus pertama $a(X) = \bar{0} \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle} \subseteq \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$. Perhatikan bahwa $(\bar{0})(\bar{1}) = \dots = (\bar{0})(X) = \dots = (\bar{0})(\bar{1} + X) = \dots = (\bar{0})(\bar{2} + X) = \dots = (\bar{0})(\bar{3} + X) = \dots = (\bar{0})(\bar{4} + X) = \dots = \bar{0} \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, dari hasil setiap perkalian didapatkan bahwa, jika $a(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ maka untuk sebarang $b(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ pastilah $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$. Untuk kasus kedua $a(X) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$. Perhatikan bahwa, $(\bar{1})(\bar{1}) = \bar{1} \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{2}) = \bar{2} \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{3}) = \bar{3} \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{4}) = \bar{4} \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(X) = X \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{2}X) = \bar{2}X \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{3}X) = \bar{3}X \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{4}X) = \bar{4}X \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{1} + X) = \bar{1} + X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{1} + \bar{2}X) = \bar{1} + \bar{2}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{1} + \bar{3}X) = \bar{1} + \bar{3}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{1} + \bar{4}X) = \bar{1} + \bar{4}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{2} + X) = \bar{2} + X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{2} + \bar{2}X) = \bar{2} + \bar{2}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{2} + \bar{3}X) = \bar{2} + \bar{3}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{2} + \bar{4}X) = \bar{2} + \bar{4}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{3} + X) = \bar{3} + X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{3} + \bar{2}X) = \bar{3} + \bar{2}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{3} + \bar{3}X) = \bar{3} + \bar{3}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{3} + \bar{4}X) = \bar{3} + \bar{4}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{4} + X) = \bar{4} + X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{4} + \bar{2}X) = \bar{4} + \bar{2}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{4} + \bar{3}X) = \bar{4} + \bar{3}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, $(\bar{1})(\bar{4} + \bar{4}X) = \bar{4} + \bar{4}X \notin K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ dari hasil setiap perkalian didapatkan bahwa, jika $a(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ agar $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ maka haruslah $b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$.

Perhatikan bahwa, dari dua kasus terlihat sebuah pola yang dapat dilihat ketika $a(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle} \subseteq \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$, maka untuk $b(X)$ dapat berupa sebarang anggota di $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ agar hasil kali $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$. Sebaliknya, jika $a(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ agar $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, maka haruslah $b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ yang secara eksplisit membuktikan bahwa jika $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, maka $a(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ atau $b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$. Sehingga untuk kasus-kasus berikutnya untuk setiap anggota dari $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_4[X]/\langle X^2 \rangle$ dapat diperlihatkan bahwa jika $a(X)b(X) \in K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$, maka pastilah $a(X) \in K_{\langle(2),\langle 1 \rangle\rangle}$ atau $b(X) \in K_{\langle(2),\langle 1 \rangle\rangle}$ atau dengan kata lain himpunan $K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$.

Selanjutnya, akan diperlihatkan unsur nilpoten dari $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$. Untuk suatu $f(X) \in \mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ terdapat $k = \mathbb{Z}^+$, sedemikian sehingga $(f(X))^k = 0$. Perhatikan bahwa, terdapat $k = 2$ sehingga $\bar{0}^2 = (X)^2 = (\bar{2}X)^2 = (\bar{3}X)^2 = (\bar{4}X)^2 = \bar{0}$. Jadi, $Nil(\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle) = \{\bar{0}, X, \bar{2}X, \bar{3}X, \bar{4}X\}$. Berdasarkan $K_{\langle(0),\langle 1 \rangle\rangle}$ adalah ideal prima pada ring

faktor $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$ dan terdapat $\text{Nil}(\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle)$, maka berdasarkan definisi, himpunan $K_{(\{0\}, \{1\})}$ merupakan ideal nil-prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle$. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 3.4.4 berlaku $2 \cdot \text{Nil}(\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle)$ yakni, $2 \cdot \text{Nil}(\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 \rangle) = \{\bar{0}, \bar{X}, \bar{2X}, \bar{3X}, \bar{4X}\}$.

3.4 Karakterisasi Ideal Nil-Prima pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

Karakterisasi ideal nil-prima pada $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dilihat melalui terpenuhinya Teorema 3.4.4. Namun, sebelum menggunakan Teorema 3.4.4 perlu memperhatikan syarat cukup dari teorema tersebut.

3.4.1 Terpenuhinya Syarat Cukup Teorema 3.4.4

Diketahui Ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ komutatif dengan unsur kesatuan, agar Teorema 3.4.4 terpenuhi maka akan diperlihatkan untuk himpunan $K_{(I,J)}$ merupakan ideal nil-prima dan terdapat unsur nilpoten dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$.

3.4.1.1. Karakterisasi Ideal Nil-Prima pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

Berdasarkan Teorema 3.4.5, bahwa setiap ideal prima pada ring R adalah ideal nil-prima di R , maka membuktikan himpunan $K_{(I,J)}$ ideal nil-prima cukup dengan memperlihatkan himpunan $K_{(I,J)}$ ideal prima di $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$.

Bukti $K_{(I,J)}$ Ideal Prima

Diberikan ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, dan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan I adalah ideal prima di $\mathbb{Z}_n$ serta $J = \mathbb{Z}_n$. Berdasarkan bukti $K_{(I,J)}$ ideal, maka dapat dipandang bahwa $K_{(I,J)}$ adalah ideal pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. Selanjutnya, akan diperlihatkan $K_{(I,J)}$ adalah ideal prima. Ambil sembarang $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, dengan $f(X)g(X) \in K_{(I,J)}$. Misalkan $f(X) = a + bX$ dan $g(X) = c + dX$. Berdasarkan definisi dari ideal prima, diasumsikan bahwa $f(X)g(X) \in K_{(I,J)}$. Perhatikan bahwa, $f(X)g(X) = ac + (ad + bd)X \in K_{(I,J)}$. Berdasarkan hasil eksplorasi dari Contoh 1 dan Contoh 2 dapat diperlihatkan bahwa untuk setiap $f(X), g(X) \in \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan $f(X)g(X) \in K_{(I,J)}$ maka haruslah $f(X) \in K_{(I,J)}$ atau $g(X) \in K_{(I,J)}$. Artinya, karena $f(X)g(X) \in K_{(I,J)}$ jelas bahwa $ac \in I$, sehingga karena I merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}_n$, maka $a \in I$ atau $c \in I$. Jika $a \in I$ dan untuk sebarang $b \in \mathbb{Z}_n$ selalu terpenuhi, maka $f(X) \in K_{(I,J)}$. Jika $c \in I$ dan untuk sebarang $d \in \mathbb{Z}_n$ selalu terpenuhi, maka $g(X) \in K_{(I,J)}$. Menggunakan bukti kontraposisif berdasarkan Contoh 1 dan 2, juga dapat diperlihatkan bahwa terdapat $a(X), b(X) \notin \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan $a(X)b(X) \notin K_{(I,J)}$ maka $a(X) \notin K_{(I,J)}$ dan $b(X) \notin K_{(I,J)}$. Dengan

demikian, terbukti bahwa untuk setiap hasil kali $f(X)g(X) \in K_{(I,J)}$, maka $f(X) \in K_{(I,J)}$ atau $g(X) \in K_{(I,J)}$ yang menyimpulkan bahwa himpunan $K_{(I,J)}$ adalah ideal prima.

Unsur Nilpoten pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$

Misalkan dinotasikan suatu elemen nilpoten dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X \rangle$ sebagai $Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X \rangle)$. Ambil sebarang $p(X) \in \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, misalkan $p(X) = p + qX$, dengan $p, q \in \mathbb{Z}_n$. Berdasarkan definisi dari unsur nilpoten, suatu $p(X)$ dikatakan sebagai elemen nilpoten dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ apabila terdapat suatu $k \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $(p(X))^k = (a + bX)^k = 0$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(a + bX)^1 &= a + bX \\(a + bX)^2 &= a^2 + 2abX + b^2X^2 \\(a + bX)^3 &= a^3 + 3a^2bX + 3ab^2X^2 + b^3X^3 \\(a + bX)^4 &= a^4 + 4a^3bX + 6a^2b^2X^2 + 4ab^3X^3 + b^4X^4 \\&\vdots \\(a + bX)^k &= a^k + k \cdot a^{k-1}bX + \dots + b^kX^k.\end{aligned}$$

Karena pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ berlaku $X^2 = 0$. Bentuk dari $(a + bX)^k$ akan tereduksi dan hanya menyisakan dua suku pertama. Sehingga pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ bentuk $(a + bX)^k$ dapat dituliskan menjadi $(a + bX)^k = a^k + k \cdot a^{k-1}bX$. Selanjutnya, agar $(a + bX)^k = 0$, maka bagian dari setiap komponen polinomialnya haruslah juga bernilai nol. Pada bagian pertama, komponen $a^k = 0 \pmod{n}$. Kondisi ini menunjukkan bahwa agar $a^k = 0$, haruslah $a \in Nil(\mathbb{Z}_n)$. Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, berdasarkan Teorema 3.5.6 jika $p = \{p_1, p_2, \dots, p_r\} \subseteq \{p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_r^{a_r}\}$ maka $p = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ merupakan unsur nilpoten di $\mathbb{Z}_n$. Bagian kedua, komponen $k \cdot a^{k-1}bX = 0$. Perhatikan bahwa, bX akan selau bersifat nilpoten, karena terdapat $k = 2$, sehingga untuk $(bX)^2 = b^2X^2 = b^2 \cdot 0 = 0$ untuk sebarang $b \in \mathbb{Z}_n$. Jadi, dapat ditunjukkan untuk elemen nilpoten dalam ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = \{a + bX \mid a \in Nil(\mathbb{Z}_n), b \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Dengan $Nil(\mathbb{Z}_n) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ untuk suatu p_i bilangan prima berbeda di $\mathbb{Z}_n$ dan $i = 1, 2, \dots, r$.

3.4.2 Karakterisasi dan Terpenuhi Teorema 3.4.4

Berdasarkan bukti ideal nil-prima $K_{(I,J)}$ dan keberadaan unsur nilpoten di ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ serta berdasarkan contoh numerik pada Contoh 1, dan Contoh 2, maka Teorema 4 telah terpenuhi. Misalkan himpunan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ adalah ideal nil-prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan terdapat $Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ sehingga berlaku $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \in K_{(I,J)}$. Perhatikan juga bahwa, berdasarkan Contoh 1 dan Contoh 2 terdapat karakterisasi unik dari bentuk $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \in K_{(I,J)}$ untuk suatu nilai n dalam struktur ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, jika n bilangan ganjil maka $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ merepresentasikan seluruh anggota himpunan $K_{(I,J)}$ atau $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = K_{(I,J)}$. Sebaliknya, jika n bilangan genap maka $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ merepresentasikan sebagian anggota dari himpunan $K_{(I,J)}$ atau $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \subseteq K_{(I,J)}$.

4. Simpulan dan Saran

Struktur dari ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dapat dibangun oleh kelas-kelas polinomial berderajat kurang dari dua, dengan bentuk umum $a + bX$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}_n$. Karakteristik utama dari struktur ring ini adalah keberadaan ideal pembangun $\langle X^2 \rangle$ yang membuat variabel X menjadi unsur nilpoten atau dengan kata lain berlaku sifat $X^2 = 0$. Pada ring faktor tersebut, didefinisikan himpunan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan I ideal prima di $\mathbb{Z}_n$ dan $J = \mathbb{Z}_n$. Himpunan $K_{(I,J)}$ tersebut membentuk struktur ideal sekaligus ideal prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. Lebih lanjut, himpunan $K_{(I,J)}$ disebut sebagai ideal nil-prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ karena terdapat $p(X) \in Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$, sehingga untuk setiap $a(X), b(X) \in \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dengan $a(X)b(X) \in K_{(I,J)}$ maka $a(X) \in K_{(I,J)}$ atau $b(X) \in K_{(I,J)}$ atau $a(X) + p(X) \in K_{(I,J)}$ atau $b(X) + p(X) \in K_{(I,J)}$.

Karakterisasi ideal nil-prima pada himpunan $K_{(I,J)}$ menyatakan bahwa jika $K_{(I,J)}$ ideal nil-prima pada ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dan terdapat $Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ maka berlaku $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \in K_{(I,J)}$. Diketahui juga bahwa, untuk n bilangan ganjil pada struktur ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, maka bentuk $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ merepresentasikan seluruh anggota dari himpunan $K_{(I,J)}$ atau dengan kata lain $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = K_{(I,J)}$. Sebaliknya, jika n bilangan genap, maka $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ hanya merepresentasikan sebagian anggota dari himpunan $K_{(I,J)}$ atau dengan kata lain $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \subseteq K_{(I,J)}$.

Penelitian selanjutnya disarankan untuk dapat memperumum derajat pangkat nilpoten pada ideal pembangunnya, misalnya dengan menganalisis ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^k \rangle$ untuk bilangan bulat $k > 2$. Selain itu, dapat juga dengan mengganti struktur ring dasar yang berbeda, seperti menggunakan ring komutatif $\mathbb{R}$, ring lokal, atau menggunakan suatu lapangan hingga $\mathbb{F}_n$ untuk melihat konsistensi sifat ideal nil-primanya dan karakterisasi yang

terbentuk.

Daftar Pustaka

- Abuosba, E., & Al-azaizeh, M. (2025). The ring $R[X]$. *International Electronic Journal of Algebra*, 37(37), 36–43. <https://doi.org/10.24330/ieja.1478925>.
- Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Algebra* (Vol. 136). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0923-2>.
- Anderson, D. D., & Kintzinger, J. (2008). Ideals in direct products of commutative rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 77(3), 477–483. <https://doi.org/10.1017/S0004972708000415>.
- Abuosba, E., & Al-azaizeh, M. (2025). The ring $R[X]$. *International Electronic Journal of Algebra*, 37(37), 36–43. <https://doi.org/10.24330/ieja.1478925>.
- Adkins, W. A., & Weintraub, S. H. (1992). *Algebra* (Vol. 136). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0923-2>.
- Anderson, D. D., & Kintzinger, J. (2008). Ideals in direct products of commutative rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 77(3), 477–483. <https://doi.org/10.1017/S0004972708000415>.
- Arifin, M. C., & Ernanto, I. (2023). Idempotent elements in matrix ring of order 2 over polynomial ring $Z_{p^{2q}}[X]$. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 6(2), 136–147. <https://doi.org/10.14710/jfma.v6i2.19307>.
- Atiyah, M. (2018). *Introduction to commutative algebra*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429493638>.
- Farshadifar, F. (2025). *Nil-prime ideals of a commutative ring*. <http://arxiv.org/abs/2409.19950>.
- Hamed, A., & Malek, A. (2020). S-prime ideals of a commutative ring. *Beiträge Zur Algebra Und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, 61(3), 533–542. <https://doi.org/10.1007/s13366-019-00476-5>.
- Phan Hong, T. (2025). Rings in which every quasi-nilpotent element is nilpotent. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 17(1), 75–81. <https://doi.org/10.47000/tjmcs.1675857>.
- Prasetyo, P. W. (2019). Radikal super nilpoten bertingkat. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 2(1), 1. <https://doi.org/10.14710/jfma.v2i1.25>.

- Rather, B. A., Pirzada, S., Naikoo, T. A., & Shang, Y. (2021). On laplacian eigenvalues of the zero-divisor graph associated to the ring of integers modulo n . *Mathematics*, 9(5), 482. <https://doi.org/10.3390/math9050482>.
- Razaq, A., & Alhamzi, G. (2023). On pythagorean fuzzy ideals of a classical ring. *AIMS Mathematics*, 8(2), 4280–4303. <https://doi.org/10.3934/math.2023213>.
- Sevim, E. S., & Koç, S. (2018). On N-prime ideals. *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 80, 179–190.