

LOWER BOUND DETERMINATION FOR THE MINIMUM SUM COLORING PROBLEM USING BIPARTITE AND CLIQUE GRAPH DECOMPOSITIONS

PENENTUAN BATAS BAWAH *MINIMUM SUM COLORING PROBLEM* DENGAN DEKOMPOSISI GRAF BIPARTIT DAN KLIK

Talenta P. Mahenindra¹, Teduh W. Mas'oe^{2‡}, and F
Septyanto^{3‡}

^{1,2,3} Department of Mathematics, IPB University, Indonesia

[‡]corresponding author: talentamahenindra @apps.ipb.ac.id

Copyright © 2026 Talenta Parfaibya Mahenindra, Teduh Wulandari Mas'oe, Fendy Septyanto. This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

The Minimum Sum Coloring Problem (MSCP) is a variant of graph coloring that aims to minimize the total sum of color values assigned to vertices. Given its high computational complexity (NP-complete), determining lower bounds is crucial as a benchmark for evaluating the performance of coloring algorithms in achieving optimal solutions. This study theoretically examines lower bound determination methods for MSCP through a partial graph extraction approach, namely bipartite decomposition along with its subfamilies (tree and path decompositions), and clique decomposition. Mathematical analysis and comparative evaluation are conducted by implementing these methods on a dense graph structure to validate the tightness of the resulting lower bounds against the actual chromatic sum value. The results show that the bipartite decomposition family is proven valid in formulating lower bounds, but possesses a theoretical limitation whereby its value will never exceed the total number of vertices plus the floor function of half the number of vertices. In contrast, clique decomposition successfully extracts the graph's density into a collection of disjoint complete subgraphs without disrupting their internal structure. This characteristic enables color values to grow quadratically following an arithmetic series, leading to the conclusion that clique decomposition is superior in producing significantly tighter lower bounds compared to the bipartite decomposition family.

Keywords: Bipartite Decomposition, Clique Decomposition, Graph Coloring, Lower Bound, Minimum Sum Coloring Problem.

Abstrak

Masalah Pewarnaan Jumlah Minimum (*Minimum Sum Coloring Problem* - MSCP) merupakan varian dari pewarnaan graf yang bertujuan meminimalkan jumlah bobot nilai warna. Mengingat masalah ini memiliki kompleksitas komputasi yang tinggi (NP-Complete), penentuan batas bawah (*lower bound*) menjadi krusial sebagai tolak ukur evaluasi performa algoritma pewarnaan dalam mencapai solusi optimal. Penelitian ini mengkaji secara teoretis metode penentuan batas bawah MSCP melalui pendekatan ekstraksi graf parsial, yakni dekomposisi bipartit beserta subfamiliannya (*tree* dan *path*), serta dekomposisi klik. Analisis matematis dan evaluasi komparatif dilakukan dengan mengimplementasikan metode-metode tersebut pada sebuah struktur graf berkepadatan tinggi untuk memvalidasi tingkat keketatan batas bawah yang dihasilkan terhadap nilai *chromatic sum* aktual. Hasil kajian menunjukkan bahwa rumpun dekomposisi bipartit terbukti valid dalam memformulasi batas bawah, namun memiliki keterbatasan teoretis yang nilainya tidak akan pernah melampaui total verteks ditambah fungsi lantai dari setengah verteksnya. Sebaliknya, dekomposisi klik berhasil mengekstrak kepadatan graf menjadi sekumpulan subgraf lengkap secara lepas tanpa merusak struktur internalnya. Karakteristik ini memungkinkan nilai warna bertumbuh secara kuadratik mengikuti deret aritmetika, sehingga dekomposisi klik disimpulkan lebih unggul dan optimal dalam menghasilkan batas bawah yang jauh lebih ketat dibandingkan rumpun dekomposisi biparti.

Kata Kunci: Batas Bawah, Dekomposisi Bipartit, Dekomposisi Klik, *Minimum Sum Coloring Problem*, Pewarnaan Graf.

1. Pendahuluan

Pewarnaan graf (*graph coloring*) adalah salah satu masalah kombinatorial klasik dalam teori graf, yang melibatkan pemberian warna kepada verteks-verteks sebuah graf sehingga tidak ada dua verteks yang saling terhubung memiliki warna yang sama. Tujuan utama Graph Coloring Problem (GCP) adalah meminimalkan banyaknya warna yang digunakan, yang dikenal sebagai bilangan kromatik ($\chi(G)$). Teknik pewarnaan graf telah diterapkan secara luas dalam berbagai bidang, termasuk penjadwalan perkuliahan, alokasi sumber daya komputasi, dan penjadwalan kendaraan (Biswas et al., 2023; Ramachandra dan Jyothi, 2022; Malviya et al., 2024). Selain itu GCP juga digunakan dalam pemilihan kanal frekuensi pada jaringan nirkabel di mana interferensi antar titik akses dimodelkan sebagai konflik dalam graf (Gimenez-Guzman et al., 2023).

Sebagai varian lanjutan dari GCP, Minimum Sum Coloring Problem (MSCP) diperkenalkan oleh Kubicka dan Schwenk (1989) dengan merepresentasikan warna sebagai bilangan asli $1, 2, \dots, k$. Alih-alih meminimalkan banyaknya warna, MSCP berfokus pada meminimalkan jumlah nilai warna tersebut. Nilai minimum ini disebut chromatic sum dan dinotasikan $\Sigma(G)$. Banyaknya warna minimum yang diperlukan dalam solusi optimal MSCP disebut *strength* dari graf, dinotasikan $s(G)$, dan nilai ini bisa lebih besar dari bilangan kromatik. MSCP biasa diaplikasikan dalam perancangan VLSI, penjadwalan, dan alokasi register (Du et al., 2024).

MSCP terbukti NP-complete, sehingga tidak ada algoritma polinomial yang dapat menjamin solusi optimal untuk sembarang graf (Kubicka & Schwenk, 1989). Mengingat tingginya kompleksitas komputasi MSCP, berbagai pendekatan algoritmik telah dikembangkan, mulai dari algoritma eksak berbasis *branch-and-price* yang mampu membuktikan optimalitas pada instansi berukuran sedang (Delle Donne et al., 2021), hingga metaheuristik dan *local search* untuk menangani graf berskala besar (Du et al., 2024; Li et al., 2024). Dalam konteks ini, batas bawah yang ketat memegang peranan penting sebagai tolak ukur kualitas solusi, tanpa batas bawah yang kuat, performa suatu algoritma tidak dapat dievaluasi secara objektif.

Rumusan batas bawah teoretis umum pernah diusulkan sebelumnya namun, rumusan ini hanya bergantung pada parameter seperti jumlah verteks, sisi, dan bilangan kromatik, tanpa mempertimbangkan struktur keterhubungan antar-verteks, sehingga menghasilkan batas yang kurang ketat untuk graf-graf padat (Moukrim et al., 2010).

Pendekatan struktural diusulkan oleh Moukrim et al. (2010) melalui ekstraksi graf parsial, khususnya melalui dekomposisi menjadi graf bipartit dan klik (subgraf lengkap). Penelitian ini merekonstruksi dan menganalisis secara teoretis metodologi tersebut, dengan melengkapi pembuktian matematis yang lebih rinci dan membandingkan efektivitas kedua pendekatan dekomposisi tersebut pada graf berkepadatan tinggi.

Tujuan penelitian ini adalah: (1) mengkaji dekomposisi bipartit beserta subfamiliinya (*tree* dan *path*) dalam menentukan batas bawah MSCP; (2) membuktikan hierarki ketaksamaan antara ketiganya; dan (3) mengkaji dekomposisi klik serta mengevaluasi keunggulannya dibandingkan dekomposisi bipartit.

2. Metodologi

Penelitian ini merupakan kajian konstruktif berbasis rekonstruksi dan analisis teorema dari literatur matematika diskret, khususnya berlandaskan pada metodologi yang diusulkan oleh Moukrim et al. (2010). Pendekatan ini tidak memerlukan pengumpulan data empiris maupun alat dan bahan eksperimen fisik.

Metode yang diterapkan meliputi: (1) kajian literatur terstruktur terhadap definisi, lemma, dan teorema yang relevan; (2) rekonstruksi matematis pembuktian batas bawah melalui dekomposisi graf parsial; serta (3)

implementasi struktural pada graf spesifik yang dipilih sebagai contoh validasi untuk menguji keketatan batas bawah terhadap nilai $\Sigma(G)$ aktual.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini dibahas definisi *Minimum Sum Coloring Problem* (MSCP) beserta pembuktian teorema batas bawah melalui dekomposisi graf parsial. Selanjutnya, dilakukan implementasi pada graf spesifik guna memvalidasi batasan-batasan teoretis tersebut, lalu diakhiri dengan evaluasi komparatif untuk menilai efektivitas setiap metode terhadap nilai $\Sigma(G)$ aktual.

3.1 Definisi *Minimum Sum Coloring Problem*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak berarah dengan V sebagai himpunan verteks ($|V| = n$) dan E sebagai himpunan sisi ($|E| = m$). Pewarnaan graf G didefinisikan sebagai fungsi $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sehingga $c(v) = i$ untuk $1 \leq i \leq k$ dan $v \in V$.

Didefinisikan X_i adalah kumpulan verteks yang punya nilai i , dimana gabungan $\{X_1, X_2, \dots, X_k\} = X = V$. Kita nyatakan $|X_i| = x_i$ dan $x_1, x_2, \dots, x_k$ diatur ulang sedemikian sehingga $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$. Didefinisikan pula jumlah nilai warna dalam bentuk fungsi:

$$Sum(X) = \sum_{i=1}^k i \cdot x_i = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + k \cdot x_k.$$

MSCP adalah pewarnaan pada graf G sedemikian sehingga menghasilkan nilai $Sum(X)$ paling minimum. Nilai minimum $Sum(X)$ ini disebut sebagai *chromatic sum* dari graf G yang dinotasikan dengan $\Sigma(G)$. Pewarnaan yang mencapai $\Sigma(G)$ disebut pewarnaan optimal. Mengingat setiap $v \in X_i$ memiliki nilai warna $c(v) = i$ dan gabungan dari semua X_i adalah V , maka $\sum_{v \in V} c(v)$ ekuivalen dengan $Sum(X)$. Sehingga dalam pewarnaan optimal berlaku $\sum_{v \in V} c(v) = \Sigma(G)$.

MSCP merupakan masalah yang NP-complete, sehingga menjadi alasan utama pentingnya penentuan batas bawah, tanpa batas bawah yang kuat, tidak dapat diukur seberapa optimal solusi yang dihasilkan suatu algoritma (Moukrim et al., 2010).

Batas bawah teoretis umum pernah dirumuskan oleh Kokosinski (2007) berdasarkan parameter dasar n , m , dan $\chi(G)$, namun menghasilkan nilai yang tidak optimal karena tidak memperhitungkan struktur keterhubungan antar-verteks (Moukrim et al., 2010). Menghadapi keterbatasan ini, Moukrim dkk. (2010) mengusulkan pendekatan struktural melalui dekomposisi graf parsial.

3.2 Dekomposisi Graf Parsial sebagai Batas Bawah

Definition 3.1 Graf Parsial Graf $G' = (V, E')$ dari $G = (V, E)$ dikatakan graf parsial dari G jika E' adalah subset dari E atau $E' \subseteq E$ (Moukrim 2010).

Theorem 3.2 Didefinisikan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf tak berarah,

dan $G' = (V, E')$ adalah graf parsial dari graf G . Jika G' adalah graf parsial dari G , berlaku:

$$\Sigma(G') \leq \Sigma(G).$$

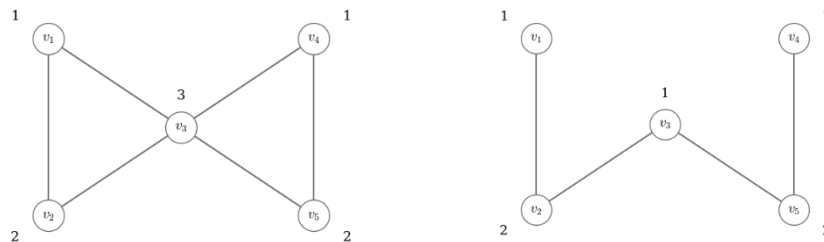
Bukti: Misalkan c adalah pewarnaan optimal G sehingga $\sum_{\{v \in V\}} c(v) = \Sigma(G)$. Karena $E' \subseteq E$, setiap pewarnaan yang valid pada G tetap valid pada G' . Karena G' memiliki sisi lebih sedikit, pewarnaan optimalnya c' menggunakan jumlah warna yang sama atau lebih sedikit, sehingga $\sum_{\{v \in V\}} c'(v) \leq \sum_{\{v \in V\}} c(v)$ yang berarti $\Sigma(G') \leq \Sigma(G)$.

Teorema 3.2 menjadi landasan utama bahwa *chromatic sum* dari graf parsial merupakan batas bawah yang valid bagi $\Sigma(G)$ aslinya. Langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi bentuk graf parsial yang paling optimal untuk dievaluasi.

3.3 Dekomposisi Bipartit

Lemma 3.3 Jika graf bipartit memiliki setidaknya satu sisi, bilangan kromatiknya adalah 2 (Mehry, S 2025).

Definition 3.4 Dekomposisi Bipartit Dekomposisi bipartit adalah proses mengekstrak graf parsial $B = (V, E_B)$ dari graf $G = (V, E)$ dengan $E_B \subseteq E$, di mana himpunan verteks V pada graf parsial B dapat dipartisi menjadi dua himpunan independen dengan menghapus sisi-sisi tertentu pada graf G hingga tidak mengandung siklus ganjil. Dari seluruh kemungkinan dekomposisi bipartit yang dievaluasi, diambil nilai $\Sigma(B)$ yang paling tinggi sebagai solusi optimal, yang dinotasikan sebagai $\Sigma_{bipart}(G)$.



Gambar 1: Graf G dan Graf B .

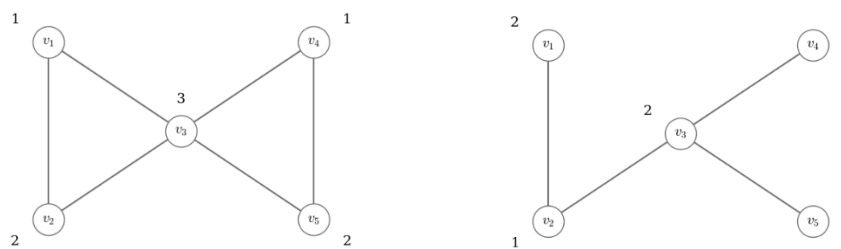
Sebagai ilustrasi, digunakan graf G dengan $n = 5$ dan $\Sigma(G) = 1(2) + 2(2) + 3(1) = 9$. Setelah mengevaluasi berbagai skema penghapusan sisi, diperoleh bahwa skema bipartit yang menghasilkan *chromatic sum* tertinggi adalah B yang menghasilkan $\Sigma(B) = 1(3) + 2(2) = 7$.

Namun, mengekstrak graf bipartit dari graf sembarang sehingga menghasilkan *chromatic sum* yang optimal merupakan masalah NP-complete. Sebagai alternatif, evaluasi diturunkan menggunakan subfamili dari graf bipartit yang dapat dihitung dalam waktu polinomial, yaitu dekomposisi *tree* dan dekomposisi *path* (Moukrim 2010).

3.4 Dekomposisi *Tree* dan Dekomposisi *Path*

Definition 3.5 Dekomposisi *Tree* Dekomposisi *tree* didefinisikan sebagai proses mengekstrak dari graf $G = (V, E)$ menjadi graf parsial $T = (V, E_T)$ berupa *tree* dengan cara membuang sisi-sisi sedemikian rupa sehingga graf hasil ekstraksi sama sekali tidak memuat siklus.

Karena graf G bisa jadi merupakan graf tak terhubung, graf parsial hasil dekomposisi ini tidak diharuskan untuk menghubungkan seluruh verteks. Dalam kondisi tersebut, graf parsial yang terbentuk akan berupa kumpulan *tree* yang saling lepas. Dari seluruh variasi graf parsial T yang dievaluasi, dicari pewarnaan optimal sehingga $\Sigma(T)$ dapat dicapai, kemudian diambil nilai $\Sigma(T)$ yang paling tinggi sebagai solusi optimal, yang dinotasikan sebagai $\Sigma_{tree}(G)$.

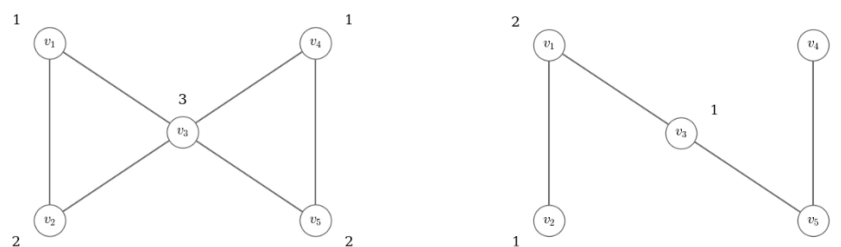


Gambar 2: Graf G dan Graf T .

Pada graf G , setelah mengevaluasi berbagai skema, diperoleh bahwa skema *tree* yang menghasilkan *chromatic sum* tertinggi adalah T yang menghasilkan $\Sigma(T) = 1(3) + 2(2) = 7$.

Definition 3.6 Dekomposisi *Path* Dekomposisi *path* didefinisikan sebagai proses mengekstrak graf parsial $P = (V, E_P)$ dari graf $G = (V, E)$ berupa *path* dengan cara membuang sisi-sisi sedemikian hingga tidak ada verteks yang memiliki derajat lebih dari dua dan dipastikan tidak memiliki siklus. Dari seluruh variasi graf parsial *path* P yang dievaluasi, dicari pewarnaan optimal sehingga $\Sigma(P)$ dapat dicapai, kemudian diambil nilai $\Sigma(P)$ yang paling tinggi sebagai solusi optimal, yang dinotasikan sebagai $\Sigma_{dpaths}(G)$.

Hasil ekstraksi ini dapat berupa satu *path* tunggal yang menghubungkan seluruh verteks, beberapa *paths* yang saling lepas, maupun kondisi di mana terdapat verteks yang berdiri sendiri.



Gambar 3: Graf G dan Graf P .

Pada graf G , setelah mengevaluasi berbagai skema, diperoleh bahwa skema *tree* yang menghasilkan *chromatic sum* tertinggi adalah P yang menghasilkan $\Sigma(P) = 1(3) + 2(2) = 7$.

3.5 Hubungan Batas Bawah MSCP Hasil Dekomposisi Bipartit, Tree, dan Path

Teorema 3.7 Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf yang memiliki n verteks. Rentang nilai batas bawah yang dihasilkan melalui dekomposisi *path*, *tree*, maupun bipartit maksimal akan selalu memenuhi ketaksamaan berikut:

$$n \leq \Sigma_{dpaths}(G) \leq \Sigma_{tree}(G) \leq \Sigma_{bipart}(G) \leq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Bukti: Ketaksamaan pada Teorema 2 ini diturunkan melalui empat bagian pembuktian sebagai berikut:

Bagian Pertama: $n \leq \Sigma_{dpaths}(G^*)$

Pada sembarang skema pewarnaan, nilai warna minimum yang dapat diberikan pada sebuah verteks adalah 1. Pada kasus trivial di mana graf parsial hasil dekomposisi *path* tidak memiliki sisi, *chromatic sum* mencapai batas minimum sebesar $\sum_{i=1}^n 1 = n$. Keberadaan sisi akan memaksa penambahan nilai warna lebih dari 2, sehingga dipastikan $n \leq \Sigma_{dpaths}(G^*)$.

Bagian Kedua: $\Sigma_{dpaths}(G^*) \leq \Sigma_{tree}(G^*)$

Misalkan P^* adalah dekomposisi *path* yang mengoptimalkan nilai $\Sigma_{dpaths}(G^*)$. Tanpa kehilangan keumuman pada graf terhubung G^* , himpunan *paths* di P^* tidak memiliki siklus dan selalu dapat dibentuk menjadi sebuah *tree* T^* melalui penambahan sisi dari G^* . Karena $P^* \subseteq T^*$ sifat monotonik pewarnaan menjamin $\Sigma(P^*) \leq \Sigma(T^*)$. Mengingat T^* hanya salah satu kandidat dari seluruh himpunan dekomposisi *tree* pada G^* , berlaku $\Sigma(T^*) \leq \Sigma_{tree}(G^*)$. Secara transitif diperoleh $\Sigma_{dpaths}(G^*) \leq \Sigma_{tree}(G^*)$.

Bagian Ketiga: $\Sigma_{tree}(G^*) \leq \Sigma_{bipart}(G^*)$

Misalkan T^* adalah dekomposisi *tree* dengan nilai optimal $\Sigma(T^*) = \Sigma_{tree}(G^*)$. Sifat tidak memiliki siklus pada *tree* menjamin bahwa setiap dua verteks di dalam *tree* hanya terdapat satu *path* yang menghubungkannya, sehingga setiap dua verteks dapat dipisahkan ke dalam dua himpunan independen. Karena T^* merupakan subfamili graf parsial bipartit dari G^* (Moukrim et.al., 2010), nilai optimalnya terikat oleh nilai maksimum dari seluruh kemungkinan struktur bipartit di G^* . Oleh karena itu, $\Sigma_{tree}(G^*) \leq \Sigma_{bipart}(G^*)$.

Bagian Keempat: $\Sigma_{bipart}(G^*) \leq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Misalkan B^* adalah sembarang graf parsial bipartit yang mempartisi himpunan verteks berorder n ke dalam dua subhimpunan independen, V_1 dan V_2 , dengan $|V_1| = n_1$ dan $|V_2| = n_2$. Pewarnaan bipartit optimal

mengalokasikan warna 1 pada V_1 dan warna 2 pada V_2 , sehingga $\Sigma(B^*) = 1(n_1) + 2(n_2)$. Dengan substitusi $n_1 = n - n_2$, bentuk tersebut disederhanakan menjadi $\Sigma(B^*) = n + n_2$. Berdasarkan prinsip optimasi kelas pewarnaan di mana $n_1 \geq n_2$, batas atas dari n_2 tercapai saat ukuran partisi paling seimbang, yaitu $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Hal ini membatasi nilai maksimum menjadi $\Sigma_{bipart}(G^*) \leq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Nilai batas atas tertinggi inilah yang selanjutnya didefinisikan sebagai $MAXLB_{bipart}$.

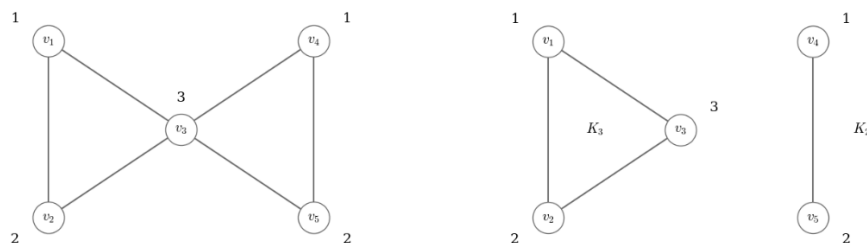
Berdasarkan pembuktian bertahap dari bagian pertama hingga bagian keempat dan seluruh transisi ketaksamaan tersebut terbukti bernilai benar untuk sembarang graf abstrak G^* , diperoleh rantai ketaksamaan:

$$n \leq \Sigma_{paths}(G^*) \leq \Sigma_{tree}(G^*) \leq \Sigma_{bipart}(G^*) \leq MAXLB_{bipart}$$

Meskipun batas ini tercapai pada G , Teorema 3.7 mengungkapkan keterbatasan $MAXLB_{bipart}$ yang hanya bergantung pada n dan mengabaikan sepenuhnya banyaknya sisi. Pada graf berkepadatan tinggi, hal ini menyebabkan gap yang signifikan terhadap $\Sigma(G)$ aktual. Untuk mengatasi keterbatasan rumpun dekomposisi bipartit pada graf padat, digunakan pendekatan dekomposisi klik yang secara langsung mempertahankan dan mengeksplorasi struktur keterhubungan erat dalam graf.

3.6 Dekomposisi Klik

Definition 3.8 Dekomposisi Klik Dekomposisi klik didefinisikan sebagai proses pembentukan graf parsial $C = (V, E_c)$ dari graf $G = (V, E)$ dengan $E_c \subseteq E$ melalui partisi himpunan verteks V menjadi sekumpulan klik (subgraf lengkap) yang saling lepas. Di dalam graf parsial C , terdapat kumpulan klik berorde k yang dinotasikan sebagai K_k . Karena setiap verteks dalam satu klik saling terhubung, maka setiap verteks memiliki warna yang berbeda, artinya setiap verteks diberikan nilai warna $1, 2, \dots, k$. Hal ini mengakibatkan total nilai warna dalam sebuah klik berorde k merupakan deret aritmetika yang dirumuskan sebagai $\frac{k(k+1)}{2}$. Masalah pencarian konfigurasi partisi klik yang menghasilkan total nilai warna maksimal didefinisikan secara khusus sebagai *Clique Decomposition for MSCP* (CDMSCP), dan solusi optimalnya dinotasikan sebagai $\Sigma_{clique}(G)$.



Gambar 4: Graf G dan Graf C .

Pada graf G , setelah mengevaluasi berbagai skema, diperoleh bahwa skema *tree* yang menghasilkan *chromatic sum* tertinggi adalah C yang menghasilkan $\Sigma(C) = \frac{3(1+3)}{2} + \frac{2(1+2)}{2} = 9$. Nilai ini sama dengan $\Sigma(G) = 9$, artinya dekomposisi klik menghasilkan batas bawah yang tidak memiliki gap dengan nilai aktualnya pada contoh ini.

Theorem 3.9 Jika himpunan verteks V pada graf G dapat dipartisi menjadi klik-klik saling lepas $V_1, V_2, \dots, V_l$ maka berlaku:

$$\Sigma_{clique}(G) = \sum_{i=1}^l \frac{|V_i|(|V_i| + 1)}{2}.$$

adalah batas bawah dari *chromatic sum* $\Sigma(G)$.

Bukti: Misalkan Graf parsial $G' = G(V_1) \cup G(V_2) \cup \dots \cup G(V_l)$ merupakan graf parsial dari G . Karena setiap klik $G(V_i)$ berorde $|V_i|$ membutuhkan tepat $|V_i|$ warna berbeda, maka untuk meminimalkan jumlah warna pada klik tersebut, warna yang digunakan adalah $\{1, 2, \dots, |V_i|\}$. Sehingga, untuk seluruh maka $G(V_i)$, $\Sigma(G(V_i)) = \frac{|V_i|(|V_i|+1)}{2}$. Maka untuk graf parsial G' , $\Sigma(G') = \sum_{i=1}^l \frac{|V_i|(|V_i|+1)}{2}$. Berdasarkan Teorema 3.2, diketahui bahwa $\Sigma(G') \leq \Sigma(G)$, maka terbukti $\Sigma_{clique}(G) = \sum_{i=1}^l \frac{|V_i|(|V_i|+1)}{2}$ merupakan batas bawah bagi $\Sigma(G)$.

Theorem 3.10 Misalkan ω adalah banyaknya verteks dari klik terbesar di graf $G = (V, E)$ dengan $|V| = n$, dan didefinisikan $r = n - \omega \lfloor \frac{n}{\omega} \rfloor$. Maka, batas atas dari nilai $\Sigma_{clique}(G)$ dapat ditentukan melalui:

$$MAXLB_{clique} = \frac{\omega(\omega + 1)}{2} \left\lfloor \frac{n}{\omega} \right\rfloor + \frac{r(r + 1)}{2}.$$

Bukti: Untuk memaksimalkan nilai $\sum_{i=1}^l \frac{|V_i|(|V_i|+1)}{2}$, kita harus membentuk klik dengan orde sebesar mungkin karena nilai $\frac{|V_i|(|V_i|+1)}{2}$ berbanding lurus pada nilai $|V_i|$.

Misalkan ω adalah ukuran klik terbesar yang dapat dibentuk di graf G . Untuk mencari kemungkinan nilai *chromatic sum* paling tinggi dari dekomposisi klik pada graf G berorde n , diasumsikan graf G memiliki kepadatan maksimal sehingga seluruh sisa verteksnya juga dapat dikelompokkan menjadi klik-klik yang berukuran sebesar ω .

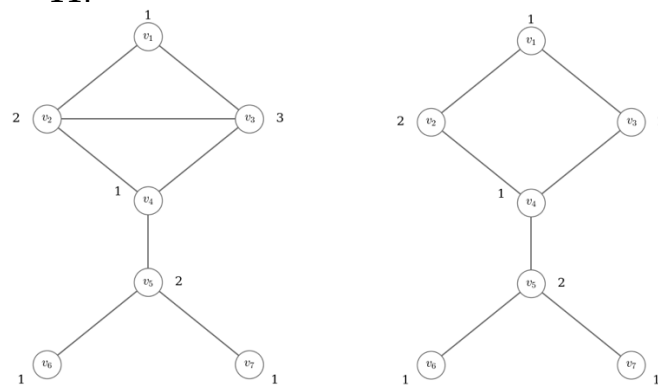
Berdasarkan asumsi tersebut, banyaknya klik ukuran ω yang dapat dibentuk dari n verteks adalah sebanyak $q = \lfloor \frac{n}{\omega} \rfloor$ klik. Jika jumlah verteks n tidak habis dibagi oleh ω , maka akan terdapat sisa verteks yang tidak ikut membentuk klik ukuran ω , yaitu sebanyak $r = n - \omega \cdot q$. Verteks sisa ini kemudian dikelompokkan ke dalam klik terakhir yang berorde r .

Dengan menjumlahkan total nilai warna dari q buah klik yang berukuran maksimal ω dan satu buah klik berukuran r , diperoleh formula batas atas maksimal untuk dekomposisi klik sebagai berikut:

$$MAXLB_{clique} = \frac{\omega(\omega + 1)}{2} \left\lfloor \frac{n}{\omega} \right\rfloor + \frac{r(r + 1)}{2}$$

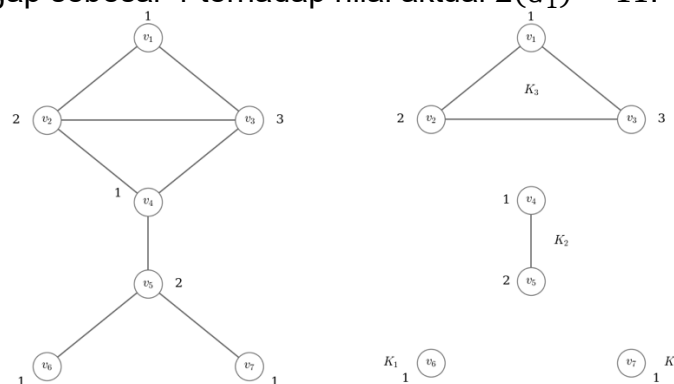
3.7 Perbandingan Batas Bawah MSCP Hasil Dekomposisi Bipartit dan Klik

Keunggulan dekomposisi klik dibandingkan rumpun dekomposisi bipartit diamati secara lebih jelas pada graf berkepadatan tinggi. Sebagai contoh pembandingan, digunakan graf G_1 dengan $n = 7$, di mana $\Sigma(G_1) = 1(4) + 2(2) + 3(1) = 11$.



Gambar 5: Graf G_1 dan Graf B_1 .

Pada dekomposisi bipartit graf G_1 , setelah mengevaluasi berbagai skema, diperoleh bahwa skema bipartit yang menghasilkan *chromatic sum* tertinggi adalah B_1 yang menghasilkan $\Sigma(B_1) = 1(4) + 2(3) = 10$. Nilai ini tepat mencapai batas atas maksimal bipartit, yakni $MAXLB_{bipart} = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 7 + \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 10$. Dengan demikian, diperoleh $\Sigma_{bipart}(G_1) = 10$. Nilai ini menyisakan gap sebesar 1 terhadap nilai aktual $\Sigma(G_1) = 11$.



Gambar 6: Graf G_1 dan Graf C_1 .

Pada dekomposisi klik graf G_3 , setelah mengevaluasi berbagai skema, diperoleh bahwa skema klik yang menghasilkan *chromatic sum* tertinggi adalah C_1 yang menghasilkan $\Sigma(Y_3) = 6 + 3 + 1(2) = 11$. Dengan demikian, diperoleh $\Sigma_{\text{clique}}(G_1) = 11$. Nilai ini tidak menyisakan gap terhadap $\Sigma(G_1) = 11$.

Dari hasil implementasi pada graf G dan G_1 , dekomposisi bipartit terhenti pada batas maksimal teoretisnya yang hanya bergantung pada banyaknya verteks, sementara dekomposisi klik berhasil mengidentifikasi kepadatan graf dan menghasilkan batas bawah yang sama dengan nilai *chromatic sum* aktual. Karakteristik pertumbuhan kuadratik $\frac{k(k+1)}{2}$ pada setiap klik berorde k menjadi faktor penentu keunggulan dekomposisi klik bahwa semakin padat graf, semakin besar klik yang dapat diekstrak, sehingga batas bawah yang dihasilkan semakin ketat.

4. Simpulan dan Saran

Berdasarkan kajian teoretis dan implementasi struktural yang telah dilakukan, dapat ditarik simpulan: (1) dekomposisi graf parsial valid digunakan untuk menentukan batas bawah MSCP. Khusus pada dekomposisi bipartit, batas optimalnya secara teoretis dibatasi hingga tidak melampaui total keseluruhan verteks ditambah dengan pembulatan ke bawah dari setengah jumlah verteks tersebut; (2) terdapat hierarki ketaksamaan di antara nilai batas bawah rumpun bipartit, yakni batas bawah dekomposisi lintasan tidak akan melampaui batas bawah dekomposisi pohon, dan batas bawah pohon tidak akan melampaui dekomposisi bipartit utuh; (3) pada graf dengan kepadatan sisi tinggi, dekomposisi klik menghasilkan batas bawah yang lebih ketat dibandingkan rumpun bipartit. Partisi klik mewajibkan alokasi warna berbeda secara berurutan yang memicu pertumbuhan bobot pewarnaan secara kuadratik, sehingga akumulasinya jauh lebih mendekati nilai pewarnaan aktual graf asli.

Untuk pengembangan penelitian selanjutnya, rumusan teoretis batas bawah MSCP ini disarankan untuk dieksekusi secara komputasional guna mengevaluasi efisiensi dan kompleksitas waktu algoritmanya, sekaligus diaplikasikan langsung ke dalam pemodelan optimasi pada permasalahan nyata. Untuk meningkatkan ketatnya taksiran batas bawah pada karakteristik graf spesifik, perlu dilakukan pendekatan ekstraksi subgraf alternatif di luar bipartit dan klik, misalnya melalui dekomposisi graf bintang, graf roda, maupun graf kupu-kupu.

Daftar Pustaka

Biswas, S., Nusrat, S. A., Sharmin, N., & Rahman, M. (2023). Graph coloring in university timetable scheduling. *International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA)*, 15(3): 14–23.

- Delle Donne, D., Furini, F., Malaguti, E., & Wolfler Calvo, R. (2021). A branch-and-price algorithm for the minimum sum coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 303: 39–56.
- Du, Y., Glover, F., Kochenberger, G., Hennig, R., Wang, H., & Hulandageri, A. (2024). Solving the minimum sum coloring problem: alternative models, exact solvers, and metaheuristics. *INFORMS Journal on Computing*, 37(2).
- Gimenez-Guzman, J., Marsa-Maestre, I., Cruz-Piris, L., Orden, D., & Tejedor-Romero, M. (2023). Channel selection in uncoordinated IEEE 802.11 networks using graph coloring. *Sensors*, 23(13): 5932.
- Kubicka, E., & Schwenk, A. J. (1989). An introduction to chromatic sums. Dalam *Proceedings of the 17th Annual ACM Conference on Computer Science* (hlm. 39–45). ACM.
- Li, Y., Zhao, M., Zhang, X., & Wang, Y. (2024). A fast local search algorithm for minimum sum coloring problem on massive graphs. *Computers & Operations Research*, 170: 106758.
- Malviya, A., Agrawal, B., & Kumar, S. (2024). Graph coloring algorithm for course time table scheduling problem. *ShodhKosh: Journal of Visual and Performing Arts*, 5(3): 452–460.
- Mehry, S. (2025). A bipartite graph linking units and zero-divisors. arXiv preprint. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.07854>.
- Moukrim, A., Sghiouer, K., Lucet, C., & Li, Y. (2010). Lower bounds for the minimal sum coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36: 663–670.
- Ramachandra, S. R., & Jyothi, M. J. (2022). A study on graph coloring techniques and their applications in scheduling problems. *Kurdish Studies*, 10(2): 4297–4305.