

MODIFICATION OF THE HELIGMAN-POLLARD INTERPOLATION METHOD IN ESTIMATING COMPLETE LIFE TABLES

MODIFIKASI METODE INTERPOLASI HELIGMAN- POLLARD DALAM MENDUGA TABEL HAYAT LENGKAP

Abram G. S. Meliala¹, I G. P. Purnaba²

^{1,2} Division of Economic, Financial, and Actuarial Mathematics, IPB University, Indonesia
Division of Economic, Financial, and Actuarial Mathematics School of Data Science,
Mathematics, and Informatics IPB University, Indonesia
corresponding author: abram30abram@apps.ipb.ac.id

Copyright © 2026 Abram G. S. Meliala and I Gusti Putu Purnaba. This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

Complete life tables are essential tools in actuarial applications, particularly for determining life insurance premiums and pension funds. However, many regions only provide abridged life tables due to data limitations. This study proposes a modification of the widely used Heligman-Pollard interpolation method to estimate complete life tables from abridged ones. Two modifications are introduced by incorporating mortality laws: the modification of the Gompertz distribution mortality rate and the modification of the Makeham distribution mortality rate. The models were implemented using 2019 United States abridged and complete life table data from the Human Mortality Database. Parameter estimation for each model was performed by minimizing the Sum of Squared Errors (SSE) utilizing Wolfram Mathematica software. The performance of the standard Heligman-Pollard method and its modified variants was evaluated and compared based on the Root Mean Square Error (RMSE). The results demonstrate that the curves representing the expected number of survivors (l_x) generated by all methods closely follow the pattern of the actual complete life table. Furthermore, the Heligman-Pollard method with the modification of the Makeham distribution mortality rate achieved the lowest RMSE value of 0.093, compared to 0.094 for the modification of the Gompertz distribution mortality rate and 0.099 for the standard method. Consequently, the Heligman-Pollard method with the modification of the Makeham distribution mortality rate is concluded to be the best method for estimating the complete life table in this study.

Keywords: Complete Life Table, Gompertz Mortality Rate, Heligman-Pollard Method, Makeham Mortality Rate.

Abstrak

Tabel hayat lengkap merupakan instrumen penting dalam aplikasi aktuarial, khususnya untuk menentukan premi asuransi jiwa dan dana pensiun. Meskipun demikian, banyak wilayah hanya menyediakan tabel hayat ringkas karena keterbatasan data. Penelitian ini mengusulkan modifikasi metode interpolasi Heligman-Pollard yang sering digunakan untuk menduga tabel hayat lengkap dari tabel hayat ringkas. Dua modifikasi diperkenalkan dengan mengintegrasikan hukum mortalitas, yaitu modifikasi laju kematian sebaran Gompertz dan modifikasi laju kematian sebaran Makeham. Model-model tersebut diterapkan menggunakan data Tabel Hayat Ringkas dan Lengkap Amerika Serikat tahun 2019 yang diperoleh dari Human Mortality Database. Pendugaan parameter untuk setiap model dilakukan dengan meminimumkan nilai Sum of Squared Errors (SSE) menggunakan perangkat lunak Wolfram Mathematica. Kinerja metode Heligman-Pollard standar dan variasi modifikasinya dievaluasi dan dibandingkan berdasarkan nilai Root Mean Square Error (RMSE). Hasil penelitian menunjukkan bahwa pola kurva nilai harapan banyaknya orang yang bertahan hidup (l_x) yang dihasilkan oleh semua metode mengikuti pola kurva tabel hayat lengkap asli. Lebih lanjut, metode Heligman-Pollard dengan modifikasi laju kematian sebaran Makeham menghasilkan nilai RMSE terkecil yaitu sebesar 0,093, dibandingkan dengan modifikasi laju kematian sebaran Gompertz sebesar 0,094 dan metode standar sebesar 0,099. Dengan demikian, metode Heligman-Pollard dengan modifikasi laju kematian sebaran Makeham disimpulkan sebagai metode terbaik untuk menduga tabel hayat lengkap dalam penelitian ini.

Kata Kunci: Laju Kematian Gompertz, Laju Kematian Makeham, Metode Heligman-Pollard, Tabel Hayat Lengkap.

1. Pendahuluan

Mortalitas merupakan salah satu komponen demografi yang digunakan untuk keperluan perhitungan aktuarial. Data mortalitas suatu wilayah menunjukkan angka kematian dalam rentang waktu tertentu. Data mortalitas biasanya disajikan dalam bentuk life table atau table hayat, yang terdiri dari beberapa informasi seperti jumlah penduduk yang meninggal pada umur tertentu, jumlah penduduk yang bertahan hidup hingga umur tertentu, dan peluang seseorang yang berumur tertentu meninggal sebelum mencapai umur tertentu. Tabel hayat mempunyai peran penting dalam asuransi jiwa, dana pensiun, dan analisis kependudukan (Manik et al., 2026). Pada dasarnya, penyusunan tabel hayat adalah berdasarkan tingkat kematian, yaitu rasio antara jumlah kematian dengan jumlah penduduk yang menanggung risiko (Dyrting & Taylor, 2024). Tabel hayat

pada umumnya hanya menampilkan pengurangan jumlah penduduk dengan hanya berdasarkan kematian. Tabel hayat multiple decrement menguraikan faktor lain yang menyebabkan terjadinya pengurangan jumlah penduduk (Siegel dan Swanson, 2004).

Berdasarkan penyajian kelompok umur, tabel hayat ada dua jenis yaitu abridged life table (tabel hayat ringkas) dan complete life table (tabel hayat lengkap). Tabel hayat ringkas adalah tabel hayat dengan pengelompokan umur penduduk lima atau sepuluh tahun, sedangkan tabel hayat lengkap adalah tabel hayat dengan pengelompokan umur penduduk satu tahunan (Siegel dan Swanson, 2004).

Wilayah yang tidak memiliki tabel hayat lengkap hanya dapat membentuk tabel hayat ringkas. Sehingga dibutuhkan sebuah metode yang tepat untuk menduga tabel hayat lengkap berdasarkan tabel hayat ringkas yang dimiliki. Metode pendugaan ini disebut metode interpolasi.

Interpolasi adalah metode yang memperkirakan nilai data yang hilang atau tidak tersedia yang berada di antara titik-titik data yang diketahui (Riningsih *et al.*, 2025). Metode interpolasi diharapkan mampu menduga tingkat mortalitas penduduk di wilayah tertentu dengan akurat. Tingkat mortalitas yang tidak akurat akan memengaruhi penghitungan premi asuransi jiwa. Terdapat beberapa metode interpolasi yang dapat digunakan untuk menduga tabel hayat lengkap salah satunya adalah dengan menyesuaikan peluang kematian berdasarkan usia dengan menggunakan beberapa parameter, yaitu metode Heligman-Pollard (Sari *et al.*, 2025).

Metode yang dapat digunakan antara lain Kostaki, Heligman-Pollard, Elandt-Johnson, dan metode Heligman-Pollard yang dimodifikasi menggunakan laju kematian sebaran Gompertz dan Makeham (Fauzi *et al.*, 2023). Metode Heligman-Pollard merupakan metode yang sering digunakan untuk menduga tabel hayat lengkap oleh berbagai peneliti. Metode Heligman dan Pollard memiliki akurasi yang tinggi dalam menghitung dan memprediksi pola kematian berdasarkan tiga penyebab utama, yaitu kematian saat lahir, kecelakaan, dan usia lanjut (Lalromawia dan Pasupulet, 2026). Riyana (2018) telah melakukan penelitian untuk menentukan metode terbaik untuk pendugaan life table penduduk usia lanjut di Indonesia. Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Heligman-Pollard merupakan metode interpolasi terbaik dari beberapa metode yang digunakan.

Hukum mortalitas yang sering digunakan dalam penyusunan tabel hayat adalah Gompertz dan Makeham. Dalam hukum mortalitas Gompertz dibutuhkan estimasi dua parameter dan Makeham membutuhkan estimasi tiga parameter (Nurhaliza *et al.*, 2025). Hukum Makeham adalah bentuk modifikasi hukum Gompertz dengan menambahkan konstanta positif yang menggambarkan penyebab kematian yang tidak dipengaruhi faktor usia (Azizah *et al.*, 2022)

Pada penelitian ini, akan digunakan modifikasi laju kematian sebaran Gompertz dan Makeham pada metode interpolasi Heligman-Pollard untuk menduga tabel hayat lengkap dari tabel hayat ringkas.

2. Metodologi

Metode interpolasi Heligman-Pollard digunakan untuk menduga tabel hayat lengkap dari tabel hayat ringkas. Data yang digunakan dalam penelitian ini yaitu Tabel Hayat Ringkas Amerika Serikat tahun 2019 dan Tabel Hayat Lengkap Amerika Serikat tahun 2019. Data tersebut diperoleh dari *website* www.mortality.org. Tabel Hayat Ringkas Amerika Serikat tahun 2019 merepresentasikan data kematian penduduk berdasarkan kelompok usia, diawali usia 0 (bayi), usia 1 (balita usia 1-4 tahun), dilanjutkan dengan interval 5 tahunan dari usia 5 tahun. Tabel Hayat Lengkap Amerika Serikat tahun 2019 merepresentasikan data kematian penduduk berdasarkan usia tunggal secara berurutan dimulai dari usia 0 sampai 109 tahun.

Komponen-komponen tabel hayat tersebut antara lain m_x , q_x , l_x , d_x , L_x , T_x , e_x , dimana x merupakan usia, m_x merupakan angka kematian sentral, q_x merupakan peluang seseorang berumur x meninggal sebelum mencapai $x + 1$, l_x merupakan nilai harapan banyaknya orang yang bertahan hidup hingga mencapai umur tepat x , d_x merupakan nilai harapan banyaknya orang yang meninggal antara umur x hingga $x + 1$, L_x merupakan banyaknya tahun hidup yang dijalani antara umur x dan $x + 1$ oleh penduduk berumur x , T_x merupakan total waktu yang dijalani penduduk berumur x sampai akhir hayatnya, e_x merupakan rata-rata tahun hidup yang akan dijalani oleh seseorang yang telah berhasil mencapai umur tersebut dalam situasi kematian yang berlaku di lingkungan masyarakatnya atau biasa disebut angka harapan hidup umur x .

Tabel 1: Cuplikan Tabel Hayat Ringkas Amerika Serikat 2019.

Usia	m_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	0.00556	0.00553	100000	553	99523	7896609	78.97
1	0.00023	0.00094	99447	93	397561	7797086	78.4
5	0.00012	0.00058	99353	57	496617	7399525	74.48
10	0.00015	0.00075	99296	74	496315	6902908	69.52
15	0.00048	0.00241	99222	239	495623	6406593	64.57
20	0.0009	0.0045	98983	445	493847	5910970	59.72
25	0.00115	0.00575	98538	566	491321	5417124	54.98
30	0.00143	0.00714	97971	699	488157	4925802	50.28
35	0.00177	0.00882	97272	858	484299	4437645	45.62
40				106			
	0.00221	0.01101	96414	2	479496	3953346	41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
110	0.70261	1	10	10	14	14	1.42

Tabel 2: Cuplikan Tabel Hayat Lengkap Amerika Serikat 2019.

Usia	m_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	0.00556	0.00553	100000	553	99523	7896609	78.97
1	0.00038	0.00038	99447	38	99427	7797086	78.4
2	0.00023	0.00023	99408	23	99397	7697658	77.43
3	0.00018	0.00018	99385	18	99376	7598262	76.45
4	0.00014	0.00014	99367	14	99360	7498885	75.47
5	0.00013	0.00013	99353	13	99347	7399525	74.48
6	0.00012	0.00012	99340	12	99334	7300178	73.49
7	0.00011	0.00011	99328	11	99323	7200844	72.5
8	0.00011	0.00011	99317	11	99312	7101522	71.5
9	0.00011	0.00011	99307	11	99301	7002210	70.51
10	0.00012	0.00012	99296	12	99290	6902908	69.52
11	0.00013	0.00013	99284	13	99278	6803618	68.53
12	0.00014	0.00014	99272	14	99265	6704340	67.54
13	0.00016	0.00016	99258	16	99250	6605075	66.54
14	0.0002	0.0002	99242	20	99232	6505825	65.56
15	0.00027	0.00027	99222	27	99208	6406593	64.57
16	0.00036	0.00036	99195	35	99177	6307385	63.59
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
109	0.6739	0.50406	20	10	15	29	1.45

Tahapan penelitian dilakukan sebagai berikut :

1. Mempelajari metode interpolasi Heligman-Pollard untuk menduga tabel hayat lengkap menggunakan tabel hayat ringkas,
2. Menduga tabel hayat lengkap menggunakan metode Heligman-Pollard,
3. Menduga tabel hayat lengkap menggunakan modifikasi metode Heligman-Pollard dengan menggunakan laju kematian sebaran Gompertz,
4. Menduga tabel hayat lengkap menggunakan modifikasi metode Heligman-Pollard dengan menggunakan laju kematian sebaran Makeham,
5. Membandingkan nilai RMSE hasil pendugaan tabel hayat lengkap masing-masing metode dengan tabel hayat lengkap asli.

2.1 Metode Interpolasi Heligman-Pollard

Model dari metode interpolasi Heligman-Pollard diberikan sebagai berikut :

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D \exp \left[-E \left(\ln \left(\frac{x}{F} \right) \right)^2 \right] + GH^x$$

dengan q_x adalah peluang orang tepat berumur x tahun akan meninggal sebelum mencapai umur $x + 1$ tahun dan p_x adalah peluang orang tepat

berumur x tahun akan bertahan hidup Sebelum mencapai umur $x + 1$. Model Heligman-Pollard mengandung delapan parameter yang bernilai positif dan dinotasikan dengan A, B, C, D, E, F, G , dan H . Tahapan yang dilakukan untuk menduga nilai parameter-parameter dari model tersebut adalah dengan meminimumkan :

$$SSE(C) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{n\hat{q}_x}{nq_x} - 1 \right)^2$$

Misalkan fungsi $F(x; C)$ merupakan model interpolasi Heligman Pollard dan suatu fungsi dengan variabel usia x , C merupakan vektor parameter,

$$\frac{q_x}{p_x} = F(x; C)$$

maka rumus $\hat{q}_x$ dari metode Heligman-Pollard dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \hat{q}_x &= \hat{p}_x F(x; C) \\ &= (1 - \hat{q}_x) F(x; C) \\ &= G(x; C) \end{aligned}$$

Sehingga dapat diketahui hubungan antara $n\hat{q}_x$ dengan $G(x; C)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} n\hat{q}_x &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (\hat{p}_x) \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \hat{q}_x) \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - G(x+i; C)) \end{aligned}$$

Setelah parameter-parameter model tersebut diperoleh dengan, peluang kematian pada tabel hayat lengkap dapat dihitung menggunakan persamaan berikut :

$$\hat{q}_x = \frac{F(x; C)}{1 + F(x; C)}$$

dengan

$$F(x; C) = A^{(x+B)^C} + D \exp \left[-E \left(\ln \left(\frac{x}{F} \right) \right)^2 \right] + GH^x$$

(Heligman dan Pollard, 1980).

2.2 Modifikasi Metode Heligman-Pollard dengan Laju Kematian Sebaran Gompertz

Misalkan fungsi $F(x; C)$ merupakan model interpolasi Heligman Pollard dan suatu fungsi dengan variabel usia x , C merupakan vektor parameter

$$F(x; C) = A^{(x+B)^C} + D \exp \left[-E \left(\ln \left(\frac{x}{F} \right) \right)^2 \right] + GH^x$$

maka rumus $\hat{q}_x$ dari metode Heligman-Pollard dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{q_x}{p_x} &= F(x; C) \\ \frac{q_x}{1 - q_x} &= F(x; C) \\ q_x &= (1 - q_x)F(x; C) \end{aligned}$$

Diketahui laju kematian sebaran Gompertz

$$\mu_x = R \exp(ax).$$

Untuk mencari hubungan nilai q_x dengan laju kematian sebaran Gompertz adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s} ds \right) \\ p_x &= \exp \left(- \int_0^1 R \exp(a(x+s)) ds \right) \\ &= \exp \left(\frac{-R}{a} (\exp(ax+a) - \exp(ax)) \right) \\ q_x &= 1 - \exp \left(\frac{-R}{a} (\exp(ax+a) - \exp(ax)) \right) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \hat{q}_x &= \left(1 - \exp \left(\frac{-R}{a} (\exp(ax+a) - \exp(ax)) \right) \right) F(x; C) \\ &= \left(\exp \left(\frac{-R}{a} (\exp(ax+a) - \exp(ax)) \right) \right) F(x; C) \end{aligned}$$

Untuk menduga tabel hayat lengkap dari tabel hayat ringkas, dibutuhkan hubungan antara ${}_n q_x$ dan q_x . Dengan menggunakan model $\hat{q}_x$, didapat hubungan antara ${}_n q_x$ dan q_x sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}_n q_x &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q_{x+i}) \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan

$${}_5\hat{q}_x = 1 - \prod_{i=0}^4 \left(1 - \left(\exp\left(\frac{-R}{a} (\exp(a(x+i) + a) - \exp(a(x+i)))\right) \right) F(x+i; \mathbf{C}) \right)$$

dengan

$$F(x+i; \mathbf{C}) = A^{(x+i+B)^C} + D \exp \left[-E \left(\ln \left(\frac{x+i}{F} \right) \right)^2 \right] + GH^{x+i}.$$

Tahapan yang dilakukan untuk menduga nilai parameter-parameter dari model tersebut adalah dengan meminimumkan nilai

$$SSE(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{{}_5\hat{q}_x}{{}_5q_x} - 1 \right)^2$$

untuk setiap nilai x pada model adalah usia yang bersesuaian dengan tabel hayat ringkas USA 2019.

Setelah parameter-parameter model tersebut diperoleh dengan, peluang kematian pada tabel hayat lengkap dapat dihitung menggunakan persamaan berikut

$$q_x = \exp \left(\frac{-R}{a} \exp(ax) (1 - \exp(a)) \right) F(x; \mathbf{C})$$

untuk setiap nilai x adalah usia dari 1 sampai 109 tahun.

2.3 Metode Interpolasi Heligman-Pollard

Model Misalkan fungsi $F(x; \mathbf{C})$ merupakan model interpolasi Heligman Pollard dan suatu fungsi dengan variabel usia x , $\mathbf{C}$ merupakan vektor parameter

$$F(x; \mathbf{C}) = A^{(x+B)^C} + D \exp \left[-E \left(\ln \left(\frac{x}{F} \right) \right)^2 \right] + GH^x$$

maka rumus $\hat{q}_x$ dari metode Heligman-Pollard dapat ditentukan sebagai berikut

$$\frac{q_x}{p_x} = F(x; \mathbf{C})$$

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = F(x; \mathbf{C})$$

$$q_x = (1 - q_x) F(x; \mathbf{C})$$

Diketahui laju kematian sebaran Makeham

$$\mu_x = A^* + R \exp(ax)$$

Untuk mencari hubungan nilai q_x dengan laju kematian sebaran Makeham adalah sebagai berikut

$${}_t p_x = \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s} ds \right)$$

$$\begin{aligned}
 p_x &= \exp\left(-\int_0^1 A^* + R \exp(a(x+s)) ds\right) \\
 &= \exp\left(-A^* - \left(\frac{R}{a}(\exp(ax+a) - \exp(ax))\right)\right) \\
 q_x &= 1 - \exp\left(-A^* - \left(\frac{R}{a}(\exp(ax+a) - \exp(ax))\right)\right)
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 \hat{q}_x &= \left(1 - \left(1 - \exp\left(-A^* - \left(\frac{R}{a}(\exp(ax+a) - \exp(ax))\right)\right)\right)\right) F(x; \mathbf{C}) \\
 &= \exp\left(-A^* - \left(\frac{R}{a}(\exp(ax+a) - \exp(ax))\right)\right) F(x; \mathbf{C})
 \end{aligned}$$

Untuk menduga tabel hayat lengkap dari tabel hayat ringkas, dibutuhkan hubungan antara ${}_nq_x$ dan q_x . Dengan menggunakan model $\hat{q}_x$, didapat hubungan antara ${}_nq_x$ dan q_x sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 {}_nq_x &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} \\
 &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q_{x+i})
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan

$${}_5\hat{q}_x = 1 - \prod_{i=0}^4 \left(1 - \exp\left(-A^* - \left(\frac{R}{a}(\exp(a(x+i)+a) - \exp(a(x+i)))\right)\right)\right) F(x+i; \mathbf{C})$$

dengan

$$F(x+i; \mathbf{C}) = A^{(x+i+B)^C} + D \exp\left[-E \left(\ln\left(\frac{x+i}{F}\right)\right)^2\right] + GH^{x+i}.$$

Tahapan yang dilakukan untuk menduga nilai parameter-parameter dari model tersebut adalah dengan meminimumkan nilai

$$SSE(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{{}_5\hat{q}_x}{{}_5q_x} - 1\right)^2$$

untuk setiap nilai x pada model adalah usia yang bersesuaian dengan tabel hayat ringkas USA 2019.

Setelah parameter-parameter model tersebut diperoleh dengan, peluang kematian pada tabel hayat lengkap dapat dihitung menggunakan persamaan berikut

$$q_x = \exp\left(-A^* - \left(\frac{R}{a}(\exp(ax+a) - \exp(ax))\right)\right) F(x; \mathbf{C})$$

untuk setiap nilai x adalah usia dari 1 sampai 109 tahun.

2.4 Metode Interpolasi Heligman-Pollard

Kesesuaian hasil pendugaan tabel hayat lengkap terhadap data asli perlu dilakukan pengujian. Pengujian tersebut dilakukan dengan menggunakan *root mean square error* (RMSE) yang didefinisikan sebagai berikut

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2 ; i = 1, 2, \dots, n}$$

dengan y_i adalah nilai sebenarnya dan $\hat{y}_i$ adalah nilai dugaan.

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk Berdasarkan hasil perhitungan dengan menggunakan software Mathematica 14.2 diperoleh nilai parameter-parameter model Heligman-Pollard sebagai berikut

Tabel 3: Nilai parameter model.

Parameter Model	HP	HP-Gompertz	HP-Makeham	Keterangan
A	994×10^{-6}	300×10^{-6}	300×10^{-6}	Representasi dari q_1
B	5.42	8.27×10^{-6}	14×10^{-6}	Perbedaan antara d_0 dan d_1
C	0.3	0.09	0.09	Penurunan laju kematian anak-anak
D	970×10^{-6}	900×10^{-6}	800×10^{-6}	Intensitas kematian pada dewasa muda
E	2.96	4.06	4.01	Sebaran usia terjadinya kecelakaan
F	32.21	30	29.8	Usia muda dengan kematian terbanyak
G	20×10^{-6}	34.4×10^{-6}	35.9×10^{-6}	Tingkat kematian usia tua
H	1.1	1.09	1.09	Laju peningkatan kematian usia tua
R	-	6.29×10^{-6}	5.89×10^{-6}	Tingkat kematian umum
a	-	90×10^{-6}	150×10^{-6}	Laju pertumbuhan umur yang spesifik dari <i>force of mortality</i>
A*	-	-	9.98×10^{-6}	Tingkat mortalitas yang disebabkan oleh wabah atau kecelakaan

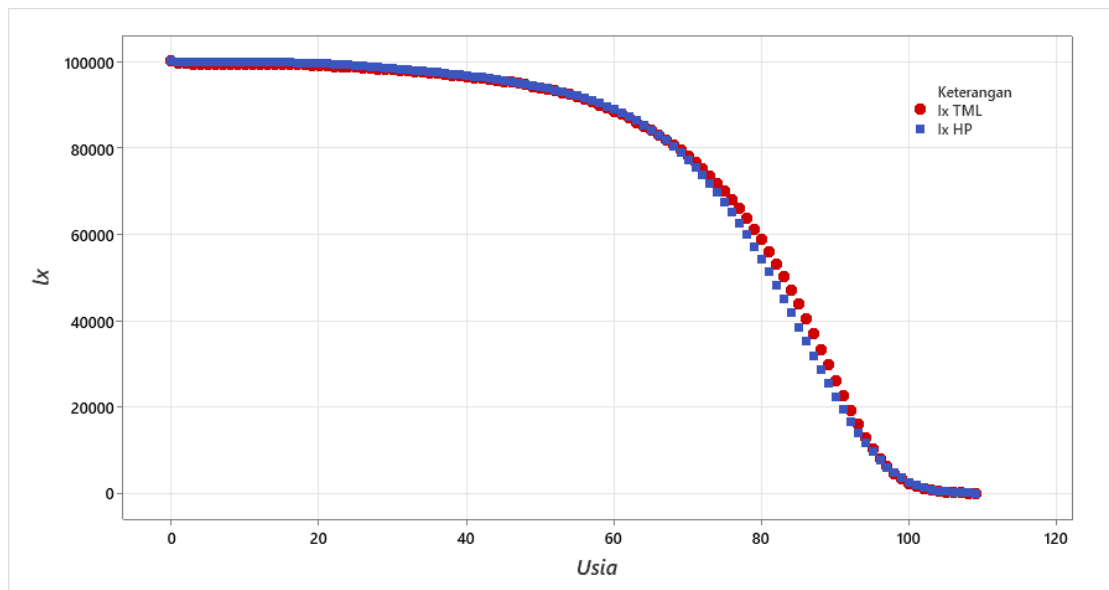
Kemudian dengan mensubstitusi nilai parameter yang telah diperoleh ke

dalam masing-masing persamaan $\hat{q}_x$, akan dihasilkan nilai dugaan $\hat{q}_x$ tabel hayat lengkap. Setelah nilai $\hat{q}_x$ diperoleh, dapat ditentukan nilai l_x dengan menggunakan rumus sebagai berikut

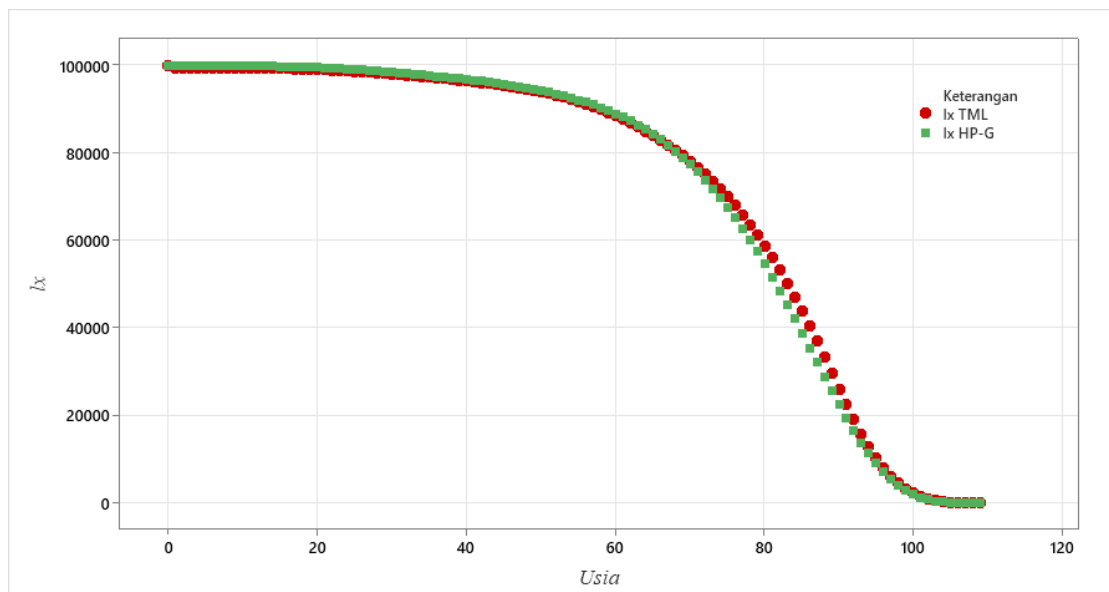
$$l_{x+1} = (1 - \hat{q}_x)l_x$$

untuk setiap nilai x adalah usia dari 1 sampai 109 tahun.

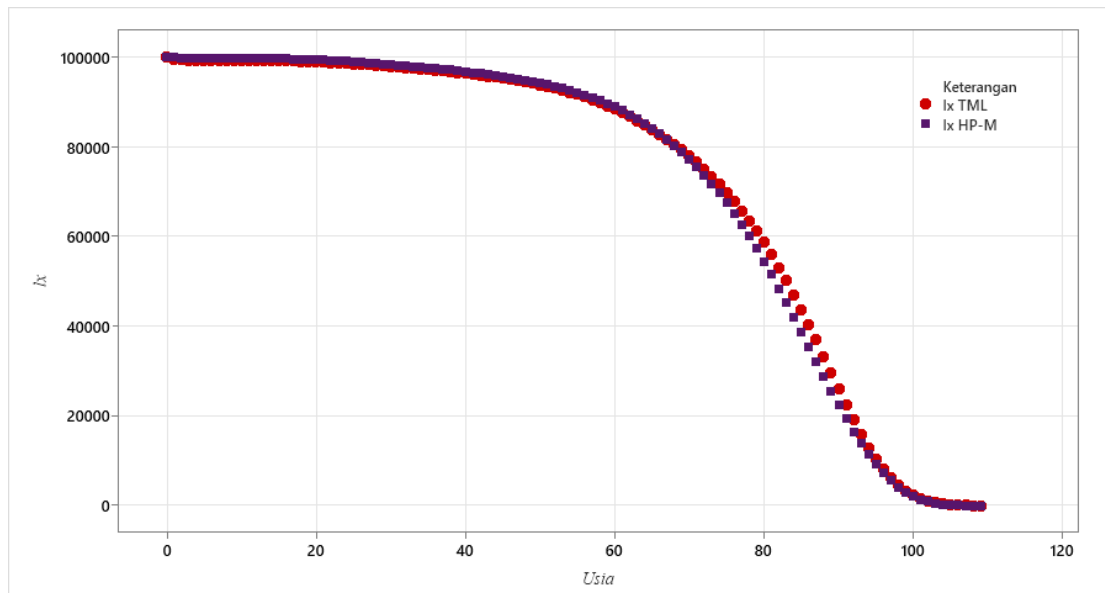
Perbandingan nilai l_x dari hasil pendugaan masing-masing model dan tabel hayat lengkap Amerika Serikat 2019 yang asli dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1: Plot nilai l_x metode Heligman Pollard dan l_x tabel mortalitas lengkap Amerika Serikat 2019.



Gambar 2: Plot nilai l_x metode Heligman Pollard modifikasi laju kematian sebaran Gompertz dan l_x tabel mortalitas lengkap Amerika Serikat 2019.



Gambar 3: Plot nilai l_x metode Heligman Pollard modifikasi laju kematian sebaran Makeham dan l_x tabel mortalitas lengkap Amerika Serikat 2019.

Pola kurva l_x hasil dari masing-masing metode Heligman-Pollard terlihat mengikuti pola kurva l_x tabel mortalitas lengkap Amerika Serikat tahun 2019.

Untuk menentukan metode yang terbaik dalam menduga nilai q_x dibutuhkan perbandingan nilai dugaan dengan nilai sebenarnya dengan menggunakan *root mean square error* (RMSE) yang didefinisikan sebagai berikut

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2 ; i = 1, 2, \dots, n}$$

dengan y_i adalah nilai sebenarnya dan $\hat{y}_i$ adalah nilai dugaan. Berdasarkan nilai $\hat{q}_x$ yang telah diperoleh, didapatkan perbandingan nilai *RMSE* masing-masing model pada tabel berikut

Tabel 2: Nilai *Root Mean Square Error* (RMSE).

RMSE	HP	HP-Gompertz	HP-Makeham
	0.099	0.094	0.093

Berdasarkan Tabel 2, metode Heligman-Pollard dengan modifikasi laju kematian sebaran Makeham memiliki nilai *RMSE* yang terkecil. Sehingga metode Heligman-Pollard dengan modifikasi laju kematian sebaran Makeham merupakan metode terbaik dalam menduga nilai q_x tabel hayat lengkap USA 2019 dengan menggunakan tabel hayat ringkas USA 2019.

4. Simpulan dan Saran

Berdasarkan hasil penelitian disimpulkan bahwa metode yang terbaik dalam menduga nilai q_x tabel hayat lengkap dengan menggunakan tabel hayat ringkas adalah metode Heligman-Pollard dengan modifikasi laju kematian sebaran Makeham dengan kurva l_x yang mengikuti kurva l_x tabel hayat lengkap USA 2019 dan nilai $RMSE$ terkecil sebesar 0.093.

Ucapan Terima Kasih. Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya Bapak Ruhayat, S.Si., M.Si., M.Act.Sc., ASAI, Pengurus Program Studi Aktuaria IPB University serta seluruh pihak yang telah memberikan dukungan moral dan teknis hingga artikel ilmiah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- Azizah, A., Ratnasari, E., Mukhtar, A., Falah, E., & Prabowo, A. (2022). Konstruksi tabel mortalitas untuk laki-laki menggunakan hukum Makeham dengan mengacu pada TMI 2019. *Perwira Journal of Science & Engineering*, 2(2):32–36. <https://doi.org/10.54199/pjse.v2i2.137>
- Dyrting, S., & Taylor, A. (2024). Estimating age-specific mortality using calibrated splines. *Population Studies*, 78(3):429-446. <https://doi.org/10.1080/00324728.2023.2228297>
- Fauzi, A. A., Nugrahani, E. H., dan Sumarno, H. (2023). Metode *Quadratic Spline* dan Heligman-Pollard dalam penyusunan *life table* Desa Gegelang Lombok Barat. *INTERVAL: Jurnal Ilmiah Matematika*, 3(1):38-45.
- Heligman, L., & Pollard, J. H. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107:49-80.
- Lalromawia, C., & Pasupuleti, S. S. R. (2026). An interpretable piecewise model for human mortality: the Christopher–Samba model. *Scientific reports*, 16(1): 12361. <https://doi.org/10.1038/s41598-026-40550-2>
- Manik, I. T., Junita, I., & Siregar, R. R. (2026). Rekonstruksi table mortalitas dinamis menggunakan pendekatan survival parametrik berbasis Wibull pada data kependudukan Indonesia. *Lebesgue : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika*, 7(1):129-142. <https://doi.org/10.46306/lb.v7i1.1104>
- Nurhaliza, A., Susanti, D. S., & Lestia, A. S. (2025). Perbandingan hukum mortalitas Gompertz dan Makeham dalam konsturksi tabel mortalitas indonesia IV. *Jurnal Gaussian*, 14(2):445-456.
- Riningsih, N., Widayarsi, R., dan Husein, I. (2025). Interpolation methods Elandt-Johnson to estimate the complete mortality table of the Indonesian

youth population based on the mortality table Coale-Demeny. *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Applications*, 19(4):3005-3018.

Riyana, M., Sumarno, H., dan Suharjo, B. (2018). Penentuan metode terbaik untuk pendugaan life table penduduk lanjut usia di Indonesia. *JMA*, 17(1):61-74.

Sari, K.N., Arfan N., Dzakiya, A., & Rusli, J. G. (2025). Construction of Mortality Rate Using Heligman Pollard Model. *ITM Web of Conferences*, 75(1): 04003. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20257504003>

Siegel, J. S., Swanson, D. A. (2004). *The Methods and Materials of Demography (second edition)*. California (USA): Elsevier Inc.