

EUROPEAN OPTION VALUATION USING FAST FOURIER TRANSFORM AND FINITE DIFFERENCE METHOD: A CASE STUDY OF LQ45 CONSTITUENTS STOCKS

VALUASI OPSI EROPA MENGGUNAKAN *FAST FOURIER TRANSFORM* DAN METODE BEDA HINGGA: STUDI KASUS SAHAM PENYUSUN LQ45

Riana Aryani^{1‡}, Nur Agustiani², and Donny Citra Lesmana³

^{1,2,3} Division of Economic, Financial, and Actuarial Mathematics School of Data Science, Mathematics, and Informatics IPB University, Indonesia

[‡]corresponding author: rianaryani@apps.ipb.ac.id

Copyright © 2026 Riana Aryani, Nur Agustiani, and Donny Citra Lesmana. This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

This study aims to apply and analyze the efficiency and accuracy of the Crank-Nicolson Finite Difference Method (FDM) and the Carr-Madan Fast Fourier Transform (FFT) in the valuation of European call options. A case study was conducted on 33 stocks that were consistently included in the LQ45 Index from September 2023 to August 2025. Accuracy was evaluated using the Relative Percentage Error (RPE) against the analytical Black-Scholes prices, while efficiency was measured based on computational time. The results indicate that both methods demonstrate a very high level of precision in replicating the Black-Scholes option values, with an average RPE of 0.15888% for the FDM and $1.63522 \times 10^{-13}\%$ for the FFT. Moreover, the FFT method proved to be significantly more efficient, requiring only 0.06 seconds of computational time for the entire sample, compared to the FDM which required 30.97 seconds. Based on these results, the FFT method demonstrates superior computational efficiency compared to the Crank-Nicolson FDM, while maintaining a very high degree of accuracy in replicating Black-Scholes option prices.

Keywords: Black-Scholes, European Option, Fast Fourier Transform, Finite Difference Method, LQ45 Index.

Abstrak

Penelitian ini bertujuan menerapkan dan menganalisis tingkat efisiensi serta akurasi Metode Beda Hingga (MBH) tipe Crank-Nicolson dan *Fast*

Fourier Transform (FFT) tipe Carr-Madan dalam valuasi opsi *call* Eropa. Studi kasus dilakukan pada 33 saham yang konsisten dimuat oleh Indeks LQ45 periode September 2023 hingga Agustus 2025. Evaluasi akurasi diukur menggunakan *Relative Percentage Error* (RPE) terhadap harga analitik Black-Scholes, sementara efisiensi diukur dari waktu komputasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua metode memiliki tingkat presisi yang sangat tinggi dalam mereplikasi nilai opsi Black-Scholes, dengan RPE rata-rata MBH sebesar 0.15888% dan FFT sebesar $1.63522 \times 10^{-13}\%$. Terlebih lagi, metode FFT terbukti secara signifikan lebih efisien karena hanya membutuhkan waktu komputasi 0.06 detik untuk seluruh sampel, dibandingkan MBH yang membutuhkan 30.97 detik. Berdasarkan hasil tersebut, metode FFT menunjukkan efisiensi komputasi yang lebih tinggi dibandingkan MBH, dengan tingkat akurasi yang tetap sangat tinggi pada valuasi opsi *call* Eropa berbasis model Black-Scholes.

Kata Kunci: Black-Scholes, *Fast Fourier Transform*, Indeks LQ45, Metode Beda Hingga, Opsi Eropa.

1. Pendahuluan

Penentuan harga wajar opsi merupakan aspek krusial bagi investor dalam memitigasi risiko fluktuasi harga aset di pasar modal. Salah satu model yang terkenal untuk menghitung nilai pasar dari opsi Eropa adalah model Black-Scholes. Persamaan model Black-Scholes adalah persamaan diferensial parsial yang bergantung pada dua variabel independen, yakni pergerakan harga saham dan waktu (Hull, 2022). Model ini memberikan solusi analitik melalui persamaan diferensial parsial (PDP) linier. Dalam penentuan harga opsi dengan model Black-Scholes, terdapat asumsi di antaranya volatilitas yang konstan, suku bunga bebas risiko yang tetap, dan tidak adanya biaya transaksi (Mooy, 2017; Rusniaty, 2023). Pada kasus yang lebih kompleks, asumsi-asumsi tersebut sering kali tidak terpenuhi, sehingga PDP menjadi tidak linier. Hal ini menyebabkan solusi analitik sulit didapatkan. Untuk memecahkan kompleksitas tersebut, diperlukan metode numerik. Beberapa metode numerik yang dapat digunakan antara lain, Metode Beda Hingga (MBH) dan *Fast Fourier Transform* (FFT).

Pendekatan MBH mendiskritisasi turunan dalam persamaan diferensial berdasarkan ekspansi deret Taylor untuk mendekati harga secara diskrit (Irawan *et al.*, 2017). Literatur menunjukkan bahwa skema MBH tipe Crank-Nicolson terbukti mampu menghasilkan estimasi komputasi dengan tingkat presisi yang tinggi (Rahmawati, 2023; Debnath *et al.*, 2022). Selain pendekatan MBH, terdapat metode *Fast Fourier Transform* yang diperkenalkan oleh Carr dan Madan (1999) yang menawarkan efisiensi komputasi yang masif. Dalam menyelesaikan valuasi opsi, metode ini memanfaatkan fungsi karakteristik dari logaritma

harga aset. Pendekatan ini mampu mempercepat proses komputasi secara signifikan, sehingga mendukung penetapan harga dan lindung nilai secara *real-time* untuk banyak kontrak opsi secara simultan (Carr & Madan, 1999).

Sebagai langkah awal untuk memastikan keandalan algoritma komputasi, penelitian ini menguji metode numerik pada kasus standar berupa valuasi opsi *call* tipe Eropa. Opsi ini dipilih karena memiliki solusi analitik pasti melalui model Black-Scholes, sehingga memungkinkan tingkat akurasi metode numerik dikalibrasi secara absolut. Berdasarkan kebutuhan validasi tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menerapkan dan menganalisis tingkat akurasi serta efisiensi komputasi dari Metode Beda Hingga (MBH) Crank-Nicolson dan *Fast Fourier Transform* (FFT) Carr-Madan terhadap hasil valuasi model analitik Black-Scholes menggunakan studi kasus pada saham-saham penyusun Indeks LQ45.

2. Metodologi

2.1 Data

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data harga saham penutupan bulanan dari saham penyusun Indeks LQ45 periode 1 September 2023 sampai dengan 31 Agustus 2025 yang diperoleh dari situs investing.com. Penelitian ini berfokus pada saham-saham yang secara konsisten terdaftar sebagai anggota tetap berdasarkan data evaluasi mayor dalam rentang waktu September 2023 hingga Agustus 2025. Data yang diakses dari situs Bursa Efek Indonesia (BEI) menunjukkan terdapat 33 emiten yang memenuhi kriteria sebagai anggota tetap selama periode tersebut beserta dengan S_0 tercantum pada Tabel 1.

Tabel 1: Daftar saham anggota beserta nilai S_0 .

No	Kode	Nama	S_0 (Rp)
1	ACES	PT Ace Hardware Indonesia Tbk.	456
2	ADRO	PT Adaro Energy Indonesia Tbk.	1755
3	AKRA	PT AKR Corporindo Tbk.	1195
:	:	:	:
31	TOWR	PT Sarana Menara Nusantara Tbk.	615
32	UNTR	PT United Tractors Tbk.	24400
33	UNVR	PT Unilever Indonesia Tbk.	1700

Adapun data suku bunga yang diperoleh dari situs bi.go.id pada 17 September 2025 sebesar 4.75% dan waktu jatuh tempo (T) adalah 1 tahun.

2.2 Tahapan Penelitian

Tahapan analisis dalam penelitian diawali dengan perhitungan *log return* untuk setiap saham menggunakan formula $u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$. Model Black-Scholes mensyaratkan bahwa pergerakan *return* saham berdistribusi normal, sehingga dilakukan uji normalitas *return* (u_i) menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov. Prinsip uji normalitas Kolmogorov-Smirnov adalah mencari simpangan terbesar (D) dari fungsi distribusi kumulatif data empiris terhadap fungsi distribusi kumulatif teoretisnya. Jika nilai D yang terbentuk dalam uji tidak terlalu besar, maka data dikategorikan berdistribusi normal (Nasrum, 2018). Hipotesis yang dirumuskan dalam melakukan uji normalitas pada penelitian ini yakni sebagai berikut.

H_0 : Distribusi *return* sama dengan distribusi normal

H_1 : Distribusi *return* tidak sama dengan distribusi normal

Setelah asumsi terpenuhi, dilakukan perhitungan estimasi volatilitas harga saham tahunan (σ) dengan persamaan $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$, $\Delta t = \frac{1}{12}$. Nilai volatilitas ini, bersama dengan parameter harga aset saat ini (S_0), harga kesepakatan (K), suku bunga bebas risiko (r), dan sisa waktu jatuh tempo (T), kemudian digunakan untuk menghitung harga opsi *call* Eropa secara analitik. Berlandaskan asumsi bahwa harga saham mengikuti proses *Geometric Brownian Motion* (GBM), diperoleh Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Black-Scholes sebagai berikut.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0.$$

Untuk opsi *call* Eropa, solusi analitik dari PDP Black-Scholes diberikan oleh

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Hasil dari formula analitik inilah yang selanjutnya dijadikan sebagai tolak ukur.

Dalam memecahkan kompleksitas Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Black-Scholes, penelitian ini mengaplikasikan pendekatan numerik berbasis Metode Beda Hingga (MBH) skema Crank-Nicolson. Skema Crank-Nicolson secara khusus dipilih karena terbukti memiliki sifat kestabilan algoritma tanpa syarat (*unconditionally stable*) dan mampu menghasilkan tingkat galat diskritisasi yang sangat kecil dalam penyelesaian persamaan diferensial (Megawati & Artiono, 2021). Pada penerapannya, prosedur ini mentransformasi PDP linier ke dalam sebuah *grid* diskrit dengan tahapan penyelesaian sebagai berikut:

- Diskretisasi dan Syarat Batas

Domain waktu dibagi menjadi partisi diskrit $\Delta t = \frac{T}{N}$ dan domain harga aset hingga $S_{\max}$ dibagi menjadi $\Delta S = \frac{S_{\max}}{M}$. Menurut Debnath dan Hossain (2020), untuk menyelesaikan diskretisasi perlu ditentukan tiga nilai batas, yaitu

- batas atas aset: $f_{i,M} = S_{\max} - Ke^{-r(N-i)\Delta t}$,
- batas bawah aset: $f_{i,0} = 0$,
- nilai awal yang ditentukan saat jatuh tempo: $f_{N,j} = \max(j\Delta S - K, 0)$.

- Sistem Persamaan Linier

Turunan dalam PDP dihampiri melalui ekspansi deret Taylor orde kedua yang dievaluasi pada titik tengah waktu. Diskretisasi ini membentuk struktur sistem persamaan linier tridiagonal berbasis matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} f_{i-1,1} \\ f_{i-1,2} \\ f_{i-1,3} \\ \vdots \\ f_{i-1,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \bar{b}_1 & -\bar{c}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\bar{a}_2 & 1 - \bar{b}_2 & -\bar{c}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{a}_3 & 1 - \bar{b}_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\bar{a}_{M-1} & 1 - \bar{b}_{M-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 + \bar{b}_1 & \bar{c}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \bar{a}_2 & 1 + \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & 1 + \bar{b}_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{M-1} & 1 + \bar{b}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{i,1} \\ f_{i,2} \\ f_{i,3} \\ \vdots \\ f_{i,M-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{a}_1 f_{i,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{c}_{M-1} f_{i,M} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 f_{i-1,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\bar{c}_{M-1} f_{i-1,M} \end{bmatrix} \right\}$$

dengan

$$\bar{a}_j = \frac{\Delta t}{4}(\sigma^2 j^2 - rj)$$

$$\bar{b}_j = -\frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 j^2 + r)$$

$$\bar{c}_j = \frac{\Delta t}{4}(\sigma^2 j^2 + rj)$$

Proses penyelesaiannya dilakukan secara iteratif mundur (*backward iteration*) bergerak dari waktu $t = T$ menuju $t = 0$.

Sebagai metode pembanding dari sisi komputasi modern, *Fast Fourier Transform* (FFT) menawarkan algoritma yang sangat efisien dalam perhitungan *Discrete Fourier Transform* (Chairunnisa et al., 2021). Dalam kerangka valuasi opsi, Carr dan Madan (1999) mengaplikasikan metode ini untuk menyederhanakan valuasi melalui domain frekuensi dengan

memanfaatkan fungsi karakteristik dari distribusi logaritma harga aset. Untuk memastikan fungsi harga opsi dapat diintegrasikan secara matematis (*square-integrable*), algoritma ini mengaplikasikan faktor redaman (*damping factor*) agar transformasi Fourier dapat berjalan secara stabil. Pada penelitian ini, fungsi karakteristik yang ditransformasikan merupakan fungsi eksak dari model Black-Scholes (Gerak Brown Geometrik). Tahapan pada algoritma FFT meliputi:

- Modifikasi Integrabilitas

FFT Carr-Madan mengidentifikasi bahwa fungsi harga opsi *call* standar ($C_T(k)$) tidak bersifat *square-integrable* sehingga tidak dapat langsung ditransformasikan menggunakan Fourier. Maka dari itu, dilakukan injeksi faktor redaman eksponensial (*damping factor*) menjadi

$$c_T(k) \equiv e^{\alpha k} C_T(k)$$

$$C_T(k) = \int_k^{\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) q_T(s) ds$$

dengan $\alpha > 0$, $k = \ln(K)$, dan $q_T(s)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal dari s . Modifikasi ini “memaksa” fungsi harga untuk menuju nol ketika nilai $k \rightarrow -\infty$, sehingga syarat transformasi terpenuhi. Kemudian, bentuk analitis diturunkan dari Transformasi *Fourier*, yang dinotasikan dengan

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk} c_T(k) dk = \frac{e^{-rT} \phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v}$$

- Inversi FFT

Harga opsi *call* pada domain harga riil dikembalikan menggunakan inversi Transformasi *Fourier* sebagai berikut

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ivk} \psi_T(v) dv$$

Proses integrasi numeriknya diaplikasikan dengan aturan pembobotan Simpson (*Simpson's rule*). Dengan memasukkan pembobot ini, formula diskret untuk menghitung harga opsi dengan log harga kesepakatan k_u dinyatakan sebagai berikut:

$$C(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \psi(v_j) \frac{\eta}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1})$$

dengan N merepresentasikan banyaknya titik evaluasi pada *grid*, dan η adalah ukuran jarak (spasi) antar titik pada *grid* frekuensi. Parameter δ_{j-1} merupakan fungsi delta Kronecker yang bernilai 1 ketika $j = 1$, dan bernilai 0 untuk nilai j lainnya.

Tahap terakhir adalah menganalisis performa komputasi dari MBH Crank-Nicolson dan FFT Carr-Madan. Tingkat galat sebagai tingkat akurasi, dievaluasi menggunakan *Relative Percentage Error* (RPE). Didefinisikan sebagai rasio antara kesalahan absolut dan nilai sebenarnya (Nasution *et al.*, 2017) yang secara matematis ditulis

$$RPE = \frac{|V_N - V_A|}{V_A} \times 100$$

V_A merujuk pada nilai analitik, sedangkan V_N merupakan nilai numerik. Selain itu, efisiensi kedua algoritma diukur secara kuantitatif dengan membandingkan total waktu eksekusi komputasi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan keseluruhan data sampel.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Return dan Uji Normalitas Return Saham

Normalitas *return* yang dihitung dari 24 data harga penutupan bulanan diuji menggunakan Kolmogorov-Smirnov (taraf signifikansi 0.05) sebagai prasyarat pemenuhan asumsi dasar model Black-Scholes.

Tabel 2: *Mean return* dan uji normalitas *return* saham.

No	Kode	Mean Return	p-value KS	Hasil Uji Asumsi
1	ACES	-0.021634	0.858477	Terpenuhi
2	ADRO	-0.021080	0.430907	Terpenuhi
3	AKRA	-0.011169	0.950561	Terpenuhi
⋮	⋮			⋮
31	TOWR	-0.019361	0.900454	Terpenuhi
32	UNTR	-0.006370	0.813306	Terpenuhi
33	UNVR	-0.034281	0.207750	Terpenuhi

Tabel 2 menunjukkan bahwa data berdistribusi normal, sehingga asumsi untuk valuasi metode Black-Scholes terpenuhi.

3.2 Standar Deviasi dan Volatilitas

Normalitas Setelah diperoleh standar deviasi setiap saham, dilakukan perhitungan volatilitas tahunan. Volatilitas (σ) diformulasikan dengan persamaan:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$$

dengan nilai $\Delta t = \frac{1}{12}$. Sehingga diperoleh nilai sebagai berikut.

Tabel 3: Standar deviasi bulanan dan volatilitas tahunan saham.

No	Kode	Standar Deviasi	Volatilitas
1	ACES	0.114567	0.396873
2	ADRO	0.147858	0.512196
3	AKRA	0.081974	0.283966
⋮	⋮	⋮	⋮

31	TOWR	0.101142	0.350367
32	UNTR	0.072261	0.250319
33	UNVR	0.158688	0.549711

Volatilitas 33 saham penyusun Indeks LQ45 tersebut berkisar antara 15% sampai dengan 70%. Nilai volatilitas yang semakin tinggi mencerminkan kondisi ketidakpastian yang ekstrem di pasar.

3.3 Metode Beda Hingga Crank-Nicolson

Valuasi opsi *call* Eropa dengan metode beda hingga Crank-Nicolson dihitung menggunakan perangkat lunak R. MBH Crank-Nicolson bekerja dengan mentransformasi Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Black-Scholes ke dalam sistem persamaan linier diskrit. Komputasi dieksekusi melalui iterasi mundur (*backward iteration*) dari titik jatuh tempo hingga $t = 0$, dengan menetapkan batas atas harga saham pada $S_{\max} = 2K$. Domain valuasi kontinu (harga dan waktu) didiskretisasi menjadi sebuah *grid* berukuran $M = 1000$ titik harga. Mengacu pada kriteria efisiensi komputasi numerik Duffy (2006), pengujian sensitivitas parameter titik waktu (N) diterapkan pada sebagian sampel untuk menentukan titik keseimbangan terbaik antara tingkat akurasi (RPE) dan waktu komputasi. Nilai N yang diuji adalah 125, 250, 500, 1000, 2000. Tingkat RPE pada seluruh uji coba menghasilkan nilai yang cenderung stabil pada rentang yang sangat kecil, tepatnya di bawah 2%. Perilaku ini sejalan dengan temuan empiris Putri (2026), yang membuktikan secara simulasi numerik bahwa metode Crank-Nicolson memiliki perubahan galat yang stabil terhadap perubahan resolusi *grid*. Mempertimbangkan efisiensi, parameter $N = 500$ ditetapkan sebagai titik komputasi yang paling optimal untuk diaplikasikan pada keseluruhan data sampel.

Setelah harga MBH Crank-Nicolson opsi *call* Eropa dihitung, dilakukan perhitungan RPE untuk mengkuantifikasi akurasi metode, sehingga disajikan hasil sebagai berikut.

Tabel 4: Harga opsi *call* Eropa beserta RPE menggunakan MBH Crank-Nicolson.

No	Kode	BS	MBH	Error (%)
1	ACES	81.13487	81.12487	0.012323
2	ADRO	388.6646	387.827	0.215510
3	AKRA	161.3386	161.3377	0.000508
:	:	:	:	:
31	TOWR	98.56421	98.56221	0.002025
32	UNTR	2982.266	2982.247	0.000623
33	UNVR	400.373	398.8048	0.391674

Berdasarkan Tabel 4, MBH Crank-Nicolson menghasilkan rata-rata RPE sebesar 0.15888%. Nilai yang sangat minim ini tidak hanya memvalidasi tingkat akurasi yang tinggi dalam mereplikasi harga analitik Black-Scholes, tetapi juga membuktikan kestabilan skema diskritisasi numerik Crank-Nicolson pada data riil pasar modal.

3.4 Metode FFT Carr-Madan

Normalitas Metode *Fast Fourier Transform* (FFT) Carr-Madan mengevaluasi harga opsi melalui domain frekuensi dengan memanfaatkan fungsi karakteristik distribusi logaritma harga aset. Untuk menjamin integrabilitas matematis, fungsi harga opsi dikalikan dengan faktor redaman ($\alpha = 1.5$) mengacu pada ketetapan Carr dan Madan (1999). Hasil transformasi analitis (ψ) tersebut kemudian dikembalikan ke domain harga riil menggunakan inversi FFT yang dikombinasikan dengan pembobotan Simpson (*Simpson's Rule*) berdasarkan ukuran jumlah titik (N) dan spasi jaring integrasi (η).

Pada metode FFT, jumlah titik komputasi (N) ditetapkan secara konstan pada $N = 4096$ (2^{12}) untuk memenuhi syarat fundamental algoritma FFT yang mensyaratkan penggunaan kelipatan bilangan pangkat dua. Oleh karena itu, pengujian sensitivitas parameter difokuskan pada variasi ukuran spasi jaring integrasi (η) sebesar 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, dan 0.40 pada sebagian data sampel. Hasil observasi menunjukkan bahwa parameter $\eta = 0.10$ secara konsisten menduplikasi harga Black-Scholes dengan nilai rata-rata RPE yang paling rendah. Mengingat variasi η juga terbukti tidak memengaruhi beban durasi komputasi, kombinasi parameter $\eta = 0.10$ dan $N = 4096$ ditetapkan sebagai parameter yang paling optimal untuk mengestimasi seluruh sampel dan diperoleh nilai berikut.

Tabel 5: Harga opsi *call* Eropa beserta RPE menggunakan FFT Carr-Madan.

No	Kode	BS	FFT	Error (%)
1	ACES	81.1349	81.1349	7.006E-14
2	ADRO	388.6646	388.6646	1.463E-14
3	AKRA	161.3386	161.3386	2.290E-13
:	:	:	:	:
31	TOWR	98.5642	98.5642	1.009E-13
32	UNTR	2982.2658	2982.2658	2.745E-13
33	UNVR	400.3730	400.3730	2.840E-14

Sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 5, metode FFT Carr-Madan terbukti memiliki tingkat akurasi yang sangat tinggi. Hal ini dibuktikan dengan rata-rata RPE yang diperoleh adalah $1.63522 \times 10^{-13}\%$. Tingkat galat yang mendekati 0% ini membuktikan keunggulan FFT dalam mengeksekusi fungsi karakteristik eksak secara analitis, sehingga mampu mereplikasi

harga Black-Scholes dengan sempurna tanpa mengalami kendala diskritisasi yang berarti.

3.5 Perbandingan MBH Crank-Nicolson dan FFT Carr-Madan

Normalitas Dengan mengaplikasikan parameter optimal tersebut, evaluasi akurasi dilakukan melalui perhitungan *relative percentage error* (RPE) dari setiap metode numerik terhadap harga analitik Black-Scholes. Selain analisis akurasi, penelitian ini juga melakukan analisis efisiensi komputasi yang diukur berdasarkan total waktu eksekusi (*running time*) yang diperlukan oleh setiap metode untuk valuasi seluruh opsi saham. Analisis ini dihitung langsung di R menggunakan fungsi *system.time()* dan diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 6: Perbandingan MBH dan FFT.

Perbandingan	MBH ($M = 1000$, $N = 500$)	FFT ($\alpha = 1.5$, $N =$ 4096 , $\eta = 0.10$)
RPE (%)	0.15888	$1.63522 \times 10^{-13}\%$
Waktu komputasi (detik)	30.97	0.06

Berdasarkan evaluasi komparatif, kedua metode terbukti mampu mereplikasi solusi analitik Black-Scholes dengan tingkat presisi yang sangat tinggi, sekaligus menunjukkan konsistensi dengan temuan pada literatur terdahulu (Carr & Madan, 1999; Rahmawati, 2023). Walaupun skema Metode Beda Hingga (MBH) Crank-Nicolson menawarkan tingkat akurasi yang ekuivalen, algoritma *Fast Fourier Transform* (FFT) Carr-Madan menunjukkan efisiensi komputasi yang lebih tinggi dalam kasus valuasi opsi call Eropa berbasis model Black-Scholes. Hasil pengujian menunjukkan bahwa FFT hanya memerlukan durasi komputasi 0.06 detik untuk 33 sampel saham, sehingga sekitar 516.2 kali lebih cepat dibandingkan MBH Crank-Nicolson.

4. Simpulan dan Saran

Penerapan Metode Beda Hingga tipe Crank-Nicolson dalam valuasi opsi *call* Eropa berhasil mereplikasi harga wajar opsi. Pengujian pada parameter titik waktu (N) membuktikan adanya interaksi (*trade-off*) yang kuat antara akurasi numerik dan efisiensi waktu komputasi. Peningkatan nilai N mampu menekan tingkat galat, namun secara bersamaan akan melipatgandakan waktu eksekusi komputasi. Nilai parameter $N = 500$ ditetapkan sebagai titik paling efektif yang memberikan keseimbangan optimal antara akurasi dan kecepatan sistem. Dengan parameter tersebut, rata-rata *relative percentage error* terhadap harga analitik Black-Scholes tercatat sangat kecil, yaitu sebesar 0.15888% dengan total waktu eksekusi komputasi 30.97 detik.

Penerapan metode *Fast Fourier Transform* (FFT) Carr-Madan juga berhasil memberikan estimasi valuasi opsi yang sangat presisi melalui evaluasi fungsi karakteristik aset di ranah frekuensi. Berdasarkan pengujian sensitivitas parameter, penyesuaian ukuran spasi jaring integrasi (η) terbukti efektif dalam meminimalisir galat diskritisasi tanpa memengaruhi durasi waktu komputasi sama sekali. Hal ini dapat terjadi mengingat beban kerja algoritma dibatasi secara konstan oleh jumlah titik diskret ($N = 4096$). Dengan konfigurasi optimal tersebut, metode FFT menghasilkan galat sebesar $1.63522 \times 10^{-13}\%$ dengan waktu penyelesaian komputasi hanya 0.06 detik.

Berdasarkan analisis komparasi tingkat efisiensi dan akurasi, kedua metode sama-sama menunjukkan keandalan dan presisi yang sangat tinggi dalam mereplikasi nilai opsi Black-Scholes. Namun demikian, dalam kasus valuasi opsi *call* Eropa berbasis model Black-Scholes, algoritma FFT Carr-Madan menunjukkan efisiensi komputasi yang lebih tinggi dibandingkan MBH Crank-Nicolson. Hasil pengujian menunjukkan bahwa FFT Carr-Madan mampu menyelesaikan komputasi sekitar 516.2 kali lebih cepat dibandingkan MBH. Temuan ini menunjukkan bahwa FFT Carr-Madan memiliki potensi yang sangat baik untuk aplikasi valuasi opsi yang memerlukan efisiensi komputasi tinggi.

Daftar Pustaka

- Carr, P., Madan, D. (1999). Option valuation using the fast fourier transform. *J Comput Finance*, 2(4): 61–73.
- Chairunnnisa U. H., Hoyyi A., & Yasin H. 2021. Pemodelan transformasi fast-fourier pada valuasi obligasi korporasi (studi kasus: pt. bank danamon tbk, pt. bank cimb niaga tbk, dan pt. bank uob indonesia tbk). *J Gaussian*, 10(1):85–93.
- Debnath, T. K., Hossain, A. S. (2020). A comparative study between implicit and *Crank-Nicolson* finite difference method for option pricing. *GANIT J Bangladesh Math Society*, 40(1): 13–27.
- Debnath, T. K., Hossain, A. S., & Debnath, T. (2022). A numerical comparative analysis between *Crank-Nicolson* finite difference method and binomial model for European call option price. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*.
- Duffy, D. J. (2006). *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach*. West Sussex(UK): John Wiley & Sons.
- Hull, J. C. (2022). *Option, Future, And Other Derivatives* (Ed ke-11). Harlow(UK): Pearson.
- Irawan, W. O. (2017). Penentuan harga opsi dengan model Black-Scholes

- menggunakan metode beda hingga center time center space (CTCS). *EKSAKTA*, 18 (2): 191–199.
- Megawati, M., & Artiono, R. (2021). Pemodelan opsi saham karyawan menggunakan pendekatan top-down. *MATHunesa Jurnal Ilmiah Matematika*, 9 (3): 524–531.
- Mooy, M. N., Rusgiyono, A., & Rahmawati, R. (2017). Penentuan harga opsi put dan call tipe eropa terhadap saham menggunakan model Black-Scholes. *Jurnal Gaussian*, 6 (3): 407–417.
- Nasrum, A. (2018). *Uji Normalitas Data Untuk Penelitian*. Bali: Jayapangus Press.
- Nasution, M. D., Nasution, E., Haryati F. (2017). Pengembangan bahan ajar metode numerik dengan pendekatan metakognitif berbantuan matlab. *Mosharafa*. 6(1): 69–80.
- Putri, I. E. W., & Artiono, R. (2026). Numerical pricing of European stock option based on Black-Scholes model using Crank-Nicolson method. *ZERO: Jurnal Sains, Matematika dan Terapan*, 10(1): 1–11.
- Rahmawati, A. S. (2023). *Perbandingan metode beda hingga implisit dan Crank-Nicolson untuk penentuan harga opsi eropa* [Skripsi]. Bogor(ID): Institut Pertanian Bogor.